

**KOEFFIZIENTENMETHODEN
BEI DER FORTSETZUNG INVARIANTER
FUNKTIONALE**

von
Achim Clausing
aus
Erlangen

1976 № 103

KOEFFIZIENTENMETHODEN BEI DER FORTSETZUNG INVARIANter FUNKTIONALE

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Achim Clausing

aus

Erlangen

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 4. Februar 1976

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. H. Remmert

Erstberichterstatte: Professor Dr. H. Bauer

Zweitberichterstatte: Professor Dr. D. Kölzow

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.....	ii
-----------------	----

(§ 1) Vorbereitungen.....	1
---------------------------	---

Teil I: Invariante Funktionale bei Darstellungen

mit beliebigen Koeffizienten.....	8
-----------------------------------	---

(§ 2) Volle X-Darstellungen.....	8
----------------------------------	---

(§ 3) Positive X-Darstellungen.....	23
-------------------------------------	----

(§ 4) Extremale X-Darstellungen.....	32
--------------------------------------	----

Teil II: Spezielle Darstellungen..... 47 |

(§ 5) Gleichmäßig stetige Koeffizienten.....	47
--	----

(§ 6) Fastperiodische Koeffizienten.....	61
--	----

Literaturverzeichnis.....	71
---------------------------	----

Verzeichnis der Definitionen.....	76
-----------------------------------	----

Einleitung.

Die Frage nach der Fortsetzbarkeit linearer Funktionale unter Einhaltung zusätzlicher Bedingungen an die Fortsetzung, die auf Strukturen des jeweils betrachteten Vektorraumes Bezug nehmen, ist eines der grundlegenden Themen der Funktionalanalysis.

In dieser Arbeit soll das Fortsetzungsproblem für einige Klassen von topologischen Vektorräumen untersucht werden, in denen Halbgruppen von linearen Abbildungen operieren. Durch Übergang zu den adjungierten Operatoren erhält man in einer solchen Situation eine Endomorphismenhalbgruppe im Dualraum; und es stellt sich die Frage, wann eine Fortsetzung einer auf einem Teilraum definierten Linearform existiert, die unter allen Operatoren aus dieser Halbgruppe invariant ist.

In spezieller Form sind derartige Probleme - und Lösungen dafür - in vielen Fällen bekannt. Um nur einige davon zu nennen:

In der Integrationstheorie lassen sich viele Fortsetzungsprozesse für Integrale in diesem Sinne verstehen. Der einfachste Fall wäre etwa die Fortsetzung des Integrals für Treppenfunktionen (auf einem beschränkten Intervall) zum Riemann-Integral für stetige Funktionen.

In axiomatischer Form wurden solche Verfahren in den fünfziger Jahren von H. Hadwiger und W. Nef untersucht (s. HADWIGER-NEF [1954] und NEF [1956]). Dort werden

"Integralfelder" betrachtet, das sind Räume von beschränkten Funktionen auf einer Menge, in der eine Gruppe G operiert. Man wählt darin eine feste positive Funktion e und fragt nun nach der Existenz von positiven, bzgl. e normierten, G -invarianten Linearformen auf dem Integralfeld, sowie nach deren Fortsetzbarkeit auf größere Integralfelder. Hinreichend dafür ist z.B., daß G abelsch ist. Nef ([1956]) betrachtet auch den allgemeineren Fall, daß die Gruppe G auf beliebigen reellen Vektorräumen operiert, statt auf einem Integralfeld. Einen Vorgänger hat die Arbeit von Nef in MORSE-AGNEW [1938], wo das Fortsetzungsproblem für G -invariante Linearformen auf reellen Vektorräumen für den Fall gelöst ist, daß G eine auflösbare Gruppe ist.

Ähnliche Aussagen für auflösbare und endliche Gruppen und für abelsche Halbgruppen von Operatoren in normierten Räumen finden sich auch in ROBISON [1954].

Betrachtet man auflösbare und endliche Gruppen sowie abelsche Halbgruppen, so haben sie (als Halbgruppen) eine Eigenschaft gemeinsam: Sie sind alle amenabel.

Es ist daher nicht überraschend, daß SILVERMAN [1956] allein unter dieser Voraussetzung zeigen konnte, daß eine Form des Satzes von Hahn-Banach mit zusätzlicher Invarianzbedingung bzgl. einer Halbgruppe von Operatoren dann gilt, wenn diese Halbgruppe amenabel ist.

Seit Erscheinen der genannten Arbeiten hat die Amenabilitätstheorie erhebliche Fortschritte gemacht. Der Begriff der Amenabilität einer Halbgruppe S wurde abgeschwächt

durch die Einführung amenabler Teilräume von $\mathbb{R}^S$ und verschärft zum Begriff der extremen Amenabilität.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, den Zusammenhang dieser verschiedenen Formen von Amenabilität mit dem Problem der Fortsetzung invarianter Funktionale zu untersuchen.

Dazu definieren wir die "Koeffizienten" einer Operatorhalbgruppe: in einem topologischen Vektorraum.

Ist S eine Halbgruppe, für die eine Darstellung U als Operatorhalbgruppe in einem topologischen Vektorraum E vorliegt, so heißen die durch μx bezeichneten Abbildungen von S in E , welche $s \in S$ in $\mu(U_s(x))$ überführen, die Koeffizienten der Darstellung (dabei sei $\mu \in E'$ und $x \in E$). Entscheidend ist nun das Verhalten der durch $x \mapsto \mu x$ bestimmten Operatoren $T_\mu: E \rightarrow \mathbb{R}^S$. Wenn für gewisse, von den Eigenschaften von E abhängige $\mu \in E'$ $T_\mu(E)$ in einem bestimmten Teilraum X von $\mathbb{R}^S$ liegt, und wenn die Operatoren T_μ hinreichend gute Eigenschaften haben (wir sprechen dann z.B. von vollen, positiven oder internen X -Darstellungen), dann besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Amenabilität des Koeffizientenraumes X und der Lösbarkeit des Fortsetzungsproblems in E .

Der Beschreibung dieses Zusammenhangs dient Teil I der vorliegenden Arbeit. Es werden für verschiedene klassische und neuere Fortsetzungssätze Verallgemeinerungen auf den Fall invarianter Fortsetzungen angegeben. In den meisten Fällen erweist sich dabei die Amenabilität der Koeffizientenräume X sogar als charakteristisch dafür, daß sich für eine

der oben genannten Klassen von X-Darstellungen das Fortsetzungsproblem lösen läßt.

Im Teil I werden an die Koeffizientenräume so wenig Forderungen wie möglich gestellt. Auch über die Struktur der zugrundeliegenden Halbgruppen sind keine einschränkenden Annahmen nötig. Darin wird deutlich, daß das Problem der invarianten Fortsetzung von Linearformen im Prinzip rein funktionalanalytischer Art ist.

Teil II der Arbeit steht der abstrakten harmonischen Analyse etwas näher. Hier wird der Begriff der X-Darstellung aus Teil I für zwei Typen von Koeffizienten, gleichmäßig stetige und fastperiodische Funktionen, genauer untersucht. Das Ziel dabei war, Darstellungen mit diesen Koeffizienten zu finden, die sich auch ohne Bezugnahme auf den Koeffizientenraum beschreiben lassen.

Als Anwendung erhält man dabei einige i. W. schon bekannte Verallgemeinerungen des Fixpunktsatzes von Markoff-Kakutani-Day.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor H. Bauer, danke ich herzlich für die vielfache Förderung, die ich durch ihn während meines Studiums und der Entstehungszeit dieser Arbeit erfahren habe.

(§ 1) Vorbereitungen.

(1.1) Bezeichnungen. Mit $\mathbb{N}$ sei die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet, mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.

Für eine Menge X bezeichnet $\mathbb{R}^X$ ($m(X)$) den Raum aller reellwertigen (reellwertigen und beschränkten) Abbildungen auf X .

Für einen topologischen Raum X sei $C(X)$ der Raum aller reellwertigen, stetigen und beschränkten Funktionen auf X .

Alle in dieser Arbeit vorkommenden topologischen Räume sollen Hausdorffräume sein, dies wird nicht jeweils eigens vermerkt.

Wenn nichts anderes gesagt ist, wird im folgenden angenommen, daß $m(X)$ und $C(X)$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz tragen.

Für einen kompakten Raum X ist $M(X)$ die Menge aller Radonmaße auf X . $M_+(X)$ bezeichnet die Menge der positiven, $M_+^1(X)$ die der positiven und zu Eins normierten Radonmaße.

Für $x \in X$ ist ε_x das Diracmaß im Punkt x .

Für einen Vektorraum E sei E^* der algebraische Dualraum. Ist E ein topologischer Vektorraum, so wird mit E' der Raum der stetigen Linearformen auf E bezeichnet.

Alle auftretenden Vektorräume sind, soweit nichts anderes gesagt wird, reell vorausgesetzt.

Ist F ein weiterer topologischer Vektorraum, dann ist $L(E, F)$ der Raum der stetigen linearen Abbildungen von E in F . Statt $L(E, E)$ schreiben wir $L(E)$.

Den zu $T \in L(E, F)$ adjungierten Operator von F' in E' bezeichnen wir mit T' .

In einem Banachraum E bedeutet $B(E)$ die abgeschlossene Einheitskugel.

Ist K eine kompakte, konvexe Menge in einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum, dann wird der Raum der stetigen, affinen Funktionen aus $\mathbb{R}^K$ mit $A(K)$ bezeichnet.

Schließlich seien noch einige Bezeichnungen im Zusammenhang mit Abbildungen erwähnt:

$f: A \rightarrow B$ ($x \mapsto f(x)$) heißt, daß f eine Abbildung mit Definitionsbereich A und Wertebereich in der Menge B ist, die jedem Element $x \in A$ das Element $f(x) \in B$ zuordnet.

Für eine Teilmenge C von A bedeutet $f|_C$ die Restriktion der Abbildung f auf die Menge C .

Die Verknüpfung zweier Abbildungen $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ schreiben wir wie üblich als $g \circ f: A \rightarrow C$.

(1.2) Definition:

Eine nichtleere Menge S , versehen mit einer assoziativen Verknüpfung $p: S \times S \rightarrow S$, heißt Halbgruppe.

Statt $p(s,t)$ schreiben wir st oder $s \cdot t$.

Eine Abbildung h von einer Halbgruppe S in eine Halbgruppe T heißt (Halbgruppen-) Homomorphismus, wenn für $s, t \in S$ $h(s) \cdot h(t) = h(st)$ gilt, und Antihomomorphismus, wenn $h(t) \cdot h(s) = h(st)$ gilt.

(1.3) Definition:

Sei E ein topologischer Vektorraum. Mit der Hintereinanderschaltung von Operatoren als Verknüpfung ist der Endomorphismenraum $L(E)$ von E dann eine Halbgruppe. Ein Halbgruppenhomomorphismus von einer Halbgruppe S in $L(E)$ heißt lineare Linksdarstellung von S auf E , ein Antihomomorphismus von S in $L(E)$ heißt lineare Rechtsdarstellung von S auf E .

Die linearen Darstellungen einer Halbgruppe S entsprechen in eindeutiger Weise den Abbildungen $\sigma: S \times E \rightarrow E$ (Schreibweise: $\sigma(s,x) =: sx$)), für welche gilt:

(1) Die Abbildung $x \mapsto sx$ liegt für
alle $s \in S$ in $L(E)$ und

(2) $(st)x = s(tx)$ für $s, t \in S$ und $x \in E$

bei linearen Linksdarstellungen, bzw.

(2') $(st)x = t(sx)$

bei linearen Rechtsdarstellungen.

Wie allgemein üblich, erhalten in dieser Arbeit lineare Darstellungen normalerweise kein besonderes Symbol, sondern werden durch Nebeneinanderschreiben (wie oben) angedeutet.

(1.4) Definition:

Für eine Halbgruppe S und für $s \in S$, $f \in \mathbb{R}^S$ sei $l_s f \in \mathbb{R}^S$ durch $t \mapsto f(st)$ definiert.

Eine Teilmenge $H \subset \mathbb{R}^S$ heißt linksinvariant, wenn für alle $s \in S$ $l_s(H) \subset H$ gilt.

Ist H eine linksinvariante Menge, dann heißt die Abbildung l , die jedem $s \in S$ den Operator $l_s: H \rightarrow H$ zuordnet, linke Translation in H .

Durch $r_s f(t) = f(ts)$ ist analog eine rechte Translation definiert.

In allen folgenden Definitionen, in denen offensichtlich ist, daß es eine "Links-" und eine "Rechtsformulierung" gibt, wird jeweils nur eine davon angegeben, die andere gilt dann ebenfalls als vereinbart.

Wo der Kontext hinreichend deutlich ist, wird der Vorsatz "Links-" oder "Rechts-" gelegentlich auch fortgelassen.

(1.5) Bemerkung:

Ein Teilraum H von $m(S)$, versehen mit der Relativtopologie, ist genau dann linksinvariant, wenn die linke Translation in H eine lineare Rechtsdarstellung von S auf H definiert.

(1.6) Definition:

Sei $X \subset \mathbb{R}^S$ ein Teilraum, der die konstanten Funktionen enthält und mit einer Topologie versehen ist, die ihn zu einem topologischen Vektorraum macht (im folgenden kurz "Vektorraumtopologie" genannt).

Ein stetiges lineares Funktional $\mu \in X'$ mit $\mu(1) = 1$ und $\mu \geq 0$ (d.h. für alle $f \in X$ mit $f \geq 0$ in der punkweisen Ordnung ist $\mu(f) \geq 0$) heißt Mittel auf X .

M_X bezeichnet die Menge der Mittel auf X .

Für jede Rechtsdarstellung von S auf einem topologischen Vektorraum E heißt $x \in E$ invariant bzgl. der Darstellung ¹⁾, wenn für alle $s \in S$ gilt: $sx = x$. Der Teilraum der invarianten Elemente in E wird mit E_S bezeichnet.

Zu jeder Rechtsdarstellung von S auf E ist in natürlicher Weise eine Linksdarstellung auf E' gegeben: man definiere für $s \in S$, $\mu \in E'$ das Element $s\mu$ durch $s\mu(x) = \mu(sx)$.

Für $(E')_S$ schreiben wir E'_S , da an keiner Stelle Verwechselungen mit $(E_S)'$ zu befürchten sind.

Wenn X ein invarianter Teilraum ist, dann heißt $\mu \in M_X$ linksinvariantes Mittel über X , wenn μ invariant bzgl der linken Translation in X ist.

X heißt linksamenabel, wenn ein linksinvariantes Mittel über X existiert.

¹⁾: Diesen Zusatz lassen wir meistens wegfallen.

(1.7) Bemerkung:

Eine Halbgruppe S wird linksamenabel genannt, wenn der (linksinvariante) Raum $m(S)$ linksamenabel ist (DAY [1957]).

Schließlich soll noch der Begriff der Koeffizienten einer linearen Darstellung eingeführt werden, der das zentrale Hilfsmittel in dieser Arbeit ist.

(1.8) Definition:

Sei S eine Halbgruppe und E ein topologischer Vektorraum, auf dem eine lineare Rechtsdarstellung von S gegeben ist.

Jedem Paar $(\mu, x) \in E' \times E$ ordnen wir das folgende Produkt zu:

$$\mu \circ x \in E^S$$

sei definiert durch $\mu \circ x(s) = \mu(sx)$.

Die Elemente von $E' \circ E$ heißen die Koeffizienten der Darstellung.

Der Name "Koeffizient" wurde in Anlehnung an eine geläufige Definition der harmonischen Analyse gewählt (s. z.B. BURCKEL [1970], Def. 5.1). Das Symbol $\circ$ soll an das "Arensprodukt" erinnern, mit dem dieses Produkt eng verwandt ist.

Es wird sich im folgenden zeigen, daß man mit Hilfe der von den jeweiligen Koeffizienten erzeugten Räume eine

einfache Klassifikation der linearen Darstellungen einer Halbgruppe gewinnen kann, die für die Untersuchung von invarianten Funktionalen besonders geeignet ist.

Teil I: INVARIANTE FUNKTIONALE BEI DARSTELLUNGEN
MIT BELIEBIGEN KOEFFIZIENTEN

(§ 2) Volle X-Darstellungen.

In diesem Abschnitt sollen zunächst mit Hilfe der Koeffizienten zwei wesentliche Typen von Darstellungen eingeführt werden, die einfachen und die vollen X-Darstellungen auf topologischen Vektorräumen.

Für diese werden Existenz- und Fortsetzungsaussagen über invariante Funktionale bewiesen. Die zugrundeliegenden Halbgruppen sind beliebige, nicht notwendig topologische Halbgruppen, obwohl natürlich der Modellfall für die im folgenden auftretenden Koeffizientenräume der Raum der stetigen Funktionen auf einer topologischen Halbgruppe ist.

Darauf, daß die Koeffizienten noch nicht konkretisiert werden (dies geschieht in Teil II), bezieht sich das Wort "beliebig" in der Überschrift dieses Teils I.

(2.1) Definition:

Sei X ein Vektorraum von reellen Funktionen auf einer Halbgruppe S , der eine Vektorraumtopologie trägt und linksinvariant ist. Eine Rechtsdarstellung von S auf einem topologischen Vektorraum E heißt einfache X-Darstellung, wenn ein stetiges,

lineares Funktional $\mu \in E'$ existiert, für das gilt:

$$(1) E_S \neq \{0\} \Rightarrow \mu|_{E_S} \neq 0 \quad \text{und}$$

(2) Durch $x \mapsto \mu x$ ist ein stetiger

Operator $T_\mu \in L(E, X)$ definiert.

Ein derartiges $\mu \in E'$ heißt einfaches Funktional
(bzgl. der gegebenen Darstellung).

(2.2) Definition:

Bei gleichen Voraussetzungen wie in Def. (2.1)

heißt die Darstellung von S auf E volle X -Darstellung,

wenn für alle $\mu \in E'$ der Operator T_μ in $L(E, X)$
liegt.

Falls die linke Translation auf X eine volle
 X -Darstellung ist, heißt X ein introvertierter
Teilraum von R^S .

(2.3) Bemerkung:

Falls die Topologie von X feiner als die der
punktweisen Konvergenz ist, dann folgt aus der
Introvertiertheit, daß X rechtsinvariant ist.

In diesem Fall sind nämlich die Auswertungsfunk-
tionale $q_s: f \mapsto f(s)$ ($f \in X, s \in S$) stetig, also
ist wegen $(q_s \circ f)(t) = q_s(l_t f) = f(ts) = (r_s f)(t)$
mit f auch $r_s f = q_s \circ f$ in X .

(2.4) Beispiele und Bemerkungen:

(1) Ist S eine topologische Halbgruppe (s. Def. (5.1))

und K eine nichtleere kompakte, konvexe Menge in einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum, $X \subset m(S)$ ein mit der Supremumsnorm versehener Teilraum und γ ein Homomorphismus von S in die Halbgruppe der stetigen, affinen Abbildungen von K in sich, dann heißt γ nach ARGABRIGHT [1968] eine E- bzw. A-Darstellung von S, X durch stetige, affine Funktionen auf K , wenn die Menge $\{x \in K: \bar{x}(A(K)) \subset X\}$ nichtleer bzw. gleich K ist. Dabei sei $\bar{x}: A(K) \rightarrow R^S$ durch $\bar{x}(a)(s) = a(\gamma_s(x))$ definiert ($a \in A(K)$, $s \in S$).

Man prüft leicht nach, daß γ genau dann eine E- bzw. A-Darstellung von S, X auf K ist, wenn die duale Darstellung $\tilde{\gamma}: S \rightarrow L(A(K))$, die durch $(\tilde{\gamma}_s(a))(x) = a(\gamma_s(x))$ gegeben ist, eine einfache bzw. volle X -Darstellung von S auf $A(K)$ ist.

Dieses Beispiel, eine analoge Definition in MITCHELL [1968], und die Definition der "leicht stetigen" Darstellung einer topologische Halbgruppe auf einem kompakten Raum, die in DAY [1964] eingeführt wurde, um den Fixpunktsatz aus DAY [1961] auf topologische Halbgruppen auszudehnen, gaben den Anlaß zu der Definition (2.2).

- (2) In DE LEEUW - GLICKSBERG [1961] werden schwach fast-periodische Halbgruppen von linearen Operatoren in Banachräumen untersucht. In §6 werden wir sehen, daß dies spezielle volle WAP(S)-Darstellungen sind,

wobei $WAP(S)$ die schwach fastperiodischen Funktionen auf einer topologischen Halbgruppe S bezeichnet (vgl. Def. (6.1)).

- (3) Der Begriff des introvertierten Teilraumes wurde zuerst von RAO [1964] für lokalkompakte topologische Gruppen untersucht und seitdem vielfach in Arbeiten über Fixpunktsätze verwendet (ARGABRIGHT [1968], MITCHELL [1968], [1970], GROSSMAN [1973], u.a.).

Die einfachen und vollen X -Darstellungen ermöglichen die folgende Definition:

(2.5) Definition:

Seien die Voraussetzungen von Def. (2.1) gegeben. Für eine einfache Darstellung von S auf E ist das "Arens-Produkt" zwischen einem beliebigen $\nu \in X'$ und einem Element $\mu \in E'$ mit $T_\mu \in L(E, X)$ folgendermaßen erklärt:

$$\nu \circ \mu \in E'$$

ist durch $(\nu \circ \mu)(x) = \nu(\mu \circ x) \quad (x \in E)$ definiert.

(2.6) Bemerkungen:

- (1) Für introvertierte Teilräume $X \subset \mathbb{R}^S$ erhält man mit der obigen Definition eine Multiplikation in X' , da dann offenbar $X' \circ X' \subset X'$ ist. X' mit dieser Multiplikation ist eine Halbgruppe (s. (2.7)(1)),

und falls zusätzlich X ein abgeschlossener Teilraum von $m(S)$ ist, ist X' mit der Arensmultiplikation sogar eine Banachalgebra (ohne Beweis).

- (2) Wenn X introvertiert ist, dann ist auch die Menge M_X der Mittel über X eine Halbgruppe, wie man leicht nachprüft. Über die Abbildung $s \mapsto qs$ ist S in M_X homomorph eingebettet, wenn die Topologie von X feiner ist als die der punktweisen Konvergenz. Für punktgetrennende X ist diese Einbettung sogar ein Halbgruppenisomorphismus.

(2.7) Lemma:

Es seien wiederum die Voraussetzungen von (2.1) gegeben. Dann gilt für jede einfache X -Darstellung von S auf einem topologischen Vektorraum E , für jedes einfache Funktional $\mu \in E'$ und für $\varphi, \sigma \in X'$:

$$(1) \varphi \circ (\sigma \circ \mu) = (\varphi \circ \sigma) \circ \mu$$

$$(2) \varphi \in X'_S \Rightarrow \varphi \circ \mu \in E'_S$$

Beweis:

(1) folgt unmittelbar aus der Definition (2.5).

Für (2) beachtet man, daß für $s \in S$, $x \in E$ $l_s(\mu \circ x) = \mu \circ sx$ gilt, und erhält damit:

$$(\varphi \circ \mu)(sx) = \varphi(\mu \circ sx) = \varphi(l_s(\mu \circ x)) = \varphi(\mu \circ x) = (\varphi \circ \mu)(x) //$$

Im folgenden Satz wird ein Kriterium für die Existenz invarianter Funktione gegeben.

Der Satz (2.8) wird hier nur deshalb bewiesen, um ein Beispiel dafür zu geben, daß einfache X-Darstellungen das richtige Hilfsmittel für Existenzaussagen über invariante Funktionale sind. Erst der stärkere Begriff der vollen X-Darstellungen ermöglicht auch die gesuchten Fortsetzungssätze.

Wir verabreden noch eine Sprechweise: Wenn S eine Halbgruppe und $X \subset \mathbb{R}^S$ ein linksinvarianter topologischer Vektorraum ist, dann heißt eine Klasse C von Rechtsdarstellungen von S auf topologischen Vektorräumen zulässig (bzgl. X), falls die linke Translation in X Element von C ist. Wenn eine Darstellung von S auf einem Raum E in C liegt, schreiben wir dafür abkürzend $E \in C$.

(2.8) Satz:

Sei S eine Halbgruppe, $X \subset \mathbb{R}^S$ ein Teilraum mit einer Vektorraumtopologie, bzgl. derer er introvertiert ist, und der die Eins enthält. C sei eine zulässige Klasse von einfachen X-Darstellungen von S auf topologischen Vektorräumen.

Dann impliziert jede der folgenden Aussagen die nächste:

- (1) X ist linksamenabel.
- (2) Für $E \in C$ gilt: wenn es ein einfaches Funktional auf E gibt, dann gibt es auch ein invariantes einfaches Funktional.
- (3) Für $E \in C$ gilt: $E_S \neq 0 \Rightarrow E_S^! \neq 0$.
- (4) $X_S^! \neq 0$.

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $E \in C$, $\mu \in E'$ ein einfaches Funktional, und $\varphi \in M_X$ linksinvariant. Dann ist $\varphi\mu \in E'$ linksinvariant nach (2.7)(2). $\varphi\mu$ ist ein einfaches Funktional: sei $x \in E_S$ mit $\mu(x) \neq 0$, dann ist $\mu ex = \mu(x) \cdot 1$, da für $s \in S$ $\mu ex(s) = \mu(sx) = \mu(x)$ ist.

Also ist $\varphi\mu(x) = \varphi(\mu(x) \cdot 1) = \mu(x) \cdot \varphi(1) = \mu(x) \neq 0$, d.h. $\varphi\mu|_{E_S} \neq 0$.

Für alle $x \in E$ ist $(\varphi\mu)ex = \varphi(\mu ex)$, also $(\varphi\mu)ex \in \varphi ex \subset X$, da wegen der Introvertiertheit von X und $\varphi(1) \neq 0$ φ ein einfaches Funktional ist. Da die Stetigkeit von $T_{\varphi\mu}$ klar ist, folgt $T_{\varphi\mu} \in L(E, X)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): $E'_S \neq 0$ impliziert nach Definition, daß es ein einfaches Funktional auf E gibt, nach (2) ist also E'_S nicht der Nullraum.

(3) $\Rightarrow$ (4): Da C zulässig ist und $1 \in X_S$ gilt, können wir (3) auf den Raum X anwenden. //

Zur Formulierung des Fortsetzungssatzes für volle X -Darstellungen brauchen wir noch eine weitere Definition:

(2.9) Definition:

Eine reelle, stetige Funktion p auf einem topologischen Vektorraum E heißt Sublinearform, wenn für alle $x, y \in E$, $\lambda \geq 0$ gilt: $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $p(\lambda x) = \lambda \cdot p(x)$. Bzgl. einer linearen Darstellung einer Halbgruppe S auf E heißt p subinvariant, wenn für $s \in S$ und

$x \in E$ $p(sx) \leq p(x)$ gilt.

(2.10) Satz:

Sei S eine Halbgruppe, $X \subset \mathbb{R}^S$ ein linksinvarianter Teilraum mit $1 \in X$, versehen mit einer Vektorraumtopologie, und sei C eine Klasse von vollen X -Darstellungen von S auf topologischen Vektorräumen.

Jede der folgenden Aussagen impliziert die nächste:

- (1) X ist linksamenabel
- (2) Sei $E \in C$, p eine subinvariante Sublinearform auf E , F ein invarianter Teilraum von E und $\mu \in F'_S$ mit $\mu \leq p$. Dann gibt es eine Fortsetzung $\tilde{\mu} \in E'_S$ von μ mit $\tilde{\mu} \leq p$.
- (3) Sei $E \in C$, $A \subset E$ eine offene, invariante, konvexe Teilmenge mit $A \cap E_S \neq \emptyset$, und $F \subset E$ ein invarianter affiner Teilraum, der A nicht schneidet. Dann gibt es eine abgeschlossene, invariante Hyperebene H in E mit $F \subset H$, die ebenfalls A nicht schneidet.
- (4) Sei $E \in C$ ein topologischer Vektorraum mit einer Nullumgebungsbasis aus offenen, konvexen, invarianten Teilmengen. Dann trennt E'_S die Punkte von E_S .

Falls C zulässig ist, und X eine Nullumgebungsbasis aus offenen, konvexen, invarianten Mengen besitzt, folgt weiter:

- (5) $X'_S \neq 0$.

Beweis:

Sei $E \in C$ und p, μ, F wie in Bedingung (2) vor-

gegeben. φ sei ein linksinvariantes Mittel auf X .

Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine Fortsetzung μ' von μ auf E mit $\mu' \leq p$.

Setze $\tilde{\mu} = \varphi \circ \mu'$. Da die Darstellung von S auf E eine volle X -Darstellung ist, ist $\tilde{\mu} \in X' \otimes E' \subset E'$.

$\tilde{\mu}$ setzt μ fort: wegen $\mu'|_F = \mu$ und der Invarianz von F ist für $x \in F$ $\mu' \otimes x = \mu \otimes x$. Die Invarianz von μ besagt wiederum, daß für $x \in F$ $\mu \otimes x = \mu(x) \cdot 1$ ist. Also ist $\tilde{\mu}(x) = \varphi(\mu' \otimes x) = \varphi(\mu \otimes x) = \mu(x)$ für $x \in F$.

$\tilde{\mu}$ ist invariant: $\tilde{\mu}(sx) = \varphi(\mu' \otimes sx) = \varphi(1_S(\mu \otimes x)) = \varphi(\mu \otimes x) = \mu(x)$ ($x \in E$, $s \in S$).

$\tilde{\mu}$ wird von p dominiert: wegen $\mu' \leq p$ ist für $s \in S$, $x \in E$: $\mu' \otimes x(s) = \mu'(sx) \leq p(sx) \leq p(x)$. Daraus folgt:

$\tilde{\mu}(x) = \varphi(\mu' \otimes x) \leq \varphi(p(x) \cdot 1) = p(x)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Wähle $a \in A \cap E_S$. p sei die Eichfunktion der Menge $A' := A - \{a\}$ (d.h. $p(x) = \inf\{\alpha > 0: x \in \alpha \cdot A'\}$). Wegen der Offenheit von A ist p stetig, und wegen der Invarianz von A damit dann auch eine subinvariante Sublinearform.

Ebenfalls weil A offen ist, gilt $A' = \{x \in E: p(x) < 1\}$.

Sei o.B.d.A. $0 \in F$. F_a sei die lineare Hülle von F und a , F_a ist ein invarianter Teilraum von E .

Durch $\mu(x + \alpha \cdot a) = -\alpha$ ist eine stetige Linearform μ auf F_a gegeben, die wegen $\mu(s(x + \alpha \cdot a)) = \mu(sx + \alpha \cdot a) = -\alpha = \mu(x + \alpha \cdot a)$ invariant ist.

Es gilt $\mu \leq p$: aus $F \cap A = \emptyset$ folgt für alle $x \in F, \alpha > 0$:
 $\frac{x}{\alpha} - a \notin A'$, d.h. $p(\frac{x}{\alpha} - a) \geq 1$ oder $p(x - \alpha \cdot a) \geq \alpha$
 $= \mu(x - \alpha \cdot a)$. Mit der entsprechenden Ungleichung
für $\alpha < 0$ folgt daraus $\mu(x) \leq p(x)$ für alle $x \in F_a$.
Wegen (2) gibt es eine invariante Fortsetzung $\tilde{\mu}$
von μ mit $\tilde{\mu} \leq p$. $H := \tilde{\mu}^{-1}(0)$ ist eine abgeschlossene,
invariante Hyperebene, die wegen $\mu|_F = 0$ F enthält.
Für $x \in H \cap A$ wäre $x - a \in A'$, also $p(x - a) < 1$
und erst recht $\tilde{\mu}(x - a) < 1$. Andererseits müßte
 $\tilde{\mu}(x - a) = \tilde{\mu}(-a) = 1$ gelten, daher ist $H \cap A = \emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Seien $x, y \in E_S, x \neq y$.

Nach (3) gibt es eine invariante Hyperebene H mit
 $x - y \in H$. H ist Kern eines invarianten stetigen
Funktional, das x und y trennt.

(4) $\Rightarrow$ (5) unter den angegebenen Zusatzvoraussetzungen
ist unmittelbar klar, man hat nur 0 und 1
durch ein invariantes Funktional zu trennen. //

Ohne weitere Forderungen an X sind die Bedingungen von
Satz (2.10) sicher nicht äquivalent. Mit dem folgenden,
aus NAMIOKA [1967] adaptierten Argument läßt sich in
einigen Fällen Äquivalenz erreichen:

(2.11) Lemma:

Sei X im vorhergehenden Satz ein abgeschlossener
Unterverband von $m(S)$ und außerdem introvertiert

(bzgl. der punktweisen Ordnung und der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz). Dann sind die Aussagen (1) - (5) in Satz (2.10) äquivalent.

Beweis:

Eine Nullumgebungsbasis aus offenen, konvexen, invarianten Mengen ist durch $(U_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ mit $U_\varepsilon = \{f \in X: \|f\| < \varepsilon\}$ gegeben, also gilt "(4) $\Rightarrow$ (5)".

(5) $\Rightarrow$ (1): Sei $\mu \in X'_S$ mit $\mu(1) = 1$. Dann ist $\mu^+ \in X'_S$:
 Aus $l'_S(\mu^+) \geq l'_S(\mu) = \mu$ und $l'_S(\mu^+) \geq 0$ folgt
 $l'_S(\mu^+) \geq \mu^+$. Also ist $\|l'_S(\mu^+) - \mu^+\| = (l'_S(\mu^+) - \mu^+)(1)$
 $= \mu^+(l'_S(1)) - \mu^+(1) = 0$, d.h. $\mu^+ \in X'_S$. $\nu := \frac{\mu^+}{\mu^+(1)}$ ist
 dann ein linksinvariantes Mittel über X . //

Dasselbe Argument zeigt übrigens auch die Äquivalenz der Aussagen (1) - (4) in Satz (2.8) für Verbände.

Die Sätze (2.8) und (2.10) hängen wesentlich von der Voraussetzung ab, daß X introvertiert ist. Zumindest für (2.10) läßt sich trotzdem eine Verallgemeinerung angeben, die von dieser Voraussetzung frei ist. Mit Hilfe der folgenden Definition und des anschließenden Satzes, die beide im wesentlichen aus RAO [1965] stammen, werden wir diese Verallgemeinerung auf (2.10) zurückführen.

(2.12) Definition:

Sei S eine Halbgruppe und $X \subset \mathbb{R}^S$ ein linksinvarianter, mit einer Vektorraumtopologie versehener Teilraum,

der die Konstanten enthält. Wenn es einen größten introvertierten Teilraum von X gibt, so heißt dieser der introvertierte Kern von X , in Zeichen: X_{1K} .

Der folgende Satz zeigt, daß der introvertierte Kern unter schwachen Voraussetzungen existiert:

(2.13) Satz:

Seien S und X wie in (2.12), die Topologie auf X sei lokalkonvex. Setze $X_1 := \{f \in X: X' \circ \{f\} \subset X\}$. Wenn für alle $\mu \in X'$ die Abbildung $T_\mu: X_1 \rightarrow X$ ($f \mapsto \mu \circ f$) stetig ist, dann existiert der introvertierte Kern von X und ist gleich X_1 . (Die Bedingungen sind z.B. für $X \subset m(S)$ erfüllt.)

Beweis:

Mit X ist auch X_1 linksinvariant: für $\mu \in X'$, $f \in X_1$ gilt nämlich $\mu \circ l_s f = l_s(\mu \circ f)$.

X_1 ist sogar introvertiert:

Dazu bemerkt man, daß für $\mu \in X'_1$, $f \in X_1$ und für jede Fortsetzung $\mu' \in X'$ von μ gilt: $\mu \circ f = \mu' \circ f$. (Formal stehen hier links und rechts des Gleichheitszeichens zwei verschiedene Multiplikationen, man sieht aber, daß daraus keine Verwechslungen entstehen können.) Wir haben $\mu \circ f \in X_1$ zu zeigen, also $\nu \circ (\mu \circ f) \in X$ für alle $\nu \in X'$.

Weil $T_{\mu'}: X_1 \rightarrow X$ stetig ist, ist durch $\rho(f) =$

$= \nu(\mu' \circ f)$ ein Element $\varrho \in X_1$ definiert. Sei $\varrho' \in X'$ eine Fortsetzung von ϱ . Dann gilt für $s \in S$:

$$\begin{aligned} \varrho' \circ f(s) &= \varrho'(1_s f) = \nu(\mu' \circ 1_s f) = \nu(1_s(\mu' \circ f)) = \\ &= (\nu \circ (\mu' \circ f))(s). \end{aligned}$$

Wir haben also $\nu \circ (\mu' \circ f) = \varrho' \circ f \in X$, also ist $\mu' \circ f \in X_1$.

Sei schließlich Y ein introvertierter Teilraum von X , von dem wir annehmen, daß er nicht in X_1 liegt. Zu $f \in Y \setminus X_1$ gibt es dann ein $\mu \in X'$, für das $\mu \circ f \notin X$ ist. Dann ist natürlich $\mu|_Y \circ f \notin Y$, also Y nicht introvertiert. X_1 ist also der größte introvertierte Teilraum von X . //

Wir bemerken noch, daß aus der Stetigkeit der Abbildung $T_\mu: X_1 \rightarrow X$ für $\mu \in X'$ folgt, daß X_{1K} in X abgeschlossen ist. Dies wird im nächsten Lemma benutzt.

In der obigen Situation sei nun noch eine volle X -Darstellung von S auf einem topologischen Vektorraum E gegeben. Wir bezeichnen den von $E' \circ E$ in X aufgespannten abgeschlossenen Teilraum mit X_E . Die Darstellung ist dann offenbar eine volle X_E -Darstellung, da alle ihre Koeffizienten in X_E liegen.

(2.14) Lemma:

Seien die Voraussetzungen von (2.13) gegeben, die Topologie von X sei feiner als die der punktweisen Konvergenz. Dann ist X_E introvertiert.

Beweis:

X_E ist linksinvariant: wegen $l_s(\mu x) = \mu s x$ für $x \in E$, $\mu \in E'$ und $s \in S$ ist der von $E' \circ E$ aufgespannte Vektorraum linksinvariant, aus der Stetigkeit der Abbildungen $T_{qs}: X \rightarrow X$ ergibt sich dann die Linksinvarianz von X_E .

Weiterhin gilt $X_E' \circ (E' \circ E) \subset X_E$:

Sei $\nu \in X_E'$, $\mu \in E'$, $x \in E$ und ν' eine Fortsetzung von ν auf X . Dann ist $(\nu \circ (\mu x))(s) = \nu(\mu s x) = \nu'(\mu s x) = (\nu' \circ \mu)(s x) = ((\nu' \circ \mu) \circ x)(s)$. Nun ist aber $X' \circ E' \subset E'$, also folgt $X_E' \circ (E' \circ E) \subset X_E$.

Aus Stetigkeitsgründen und der Abgeschlossenheit von X_E folgt dann $X_E' \circ X_E \subset X_E$. Die Stetigkeit von T_μ für $\mu \in X_E'$ ist klar. //

(2.15) Satz:

Sei S eine Halbgruppe, $X \subset m(s)$ ein linksinvarianter abgeschlossener Teilraum mit $1 \in X$, und C eine Klasse von vollen X -Darstellungen von S auf topologischen Vektorräumen. Dann impliziert

- (1) X_{1K} ist linksamenabel
die Aussagen (2) bis (4) aus Satz (2.10).
Falls C X_{1K} -zulässig ist, folgt weiter
- (5) Es gibt ein linksinvariantes $\mu \in X_{1K}'$ mit $\mu \neq 0$.

Beweis:

Da C sogar aus vollen X_{1K} -Darstellungen von S

besteht (dies folgt aus dem vorhergehenden Lemma),
läßt sich Satz (2.10) anwenden. //

(2.16) Bemerkung:

Es ist klar, daß man (2.15) auch unter den allgemeineren Voraussetzungen von (2.14) formulieren kann.

Zur Interpretation von (2.15) sei noch bemerkt, daß man die Aussage so verstehen kann, daß es sinnlos ist, volle X -Darstellungen für nicht introvertierte Räume X zu betrachten. Dies erklärt z.B., warum in §5 keine vollen $C(S)$ -Darstellungen untersucht werden.

(§ 3) Positive X-Darstellungen.

Auf topologischen Vektorräumen mit zusätzlichen Struktureigenschaften kann man im allgemeinen genauere Fortsetzungsaussagen für lineare Funktionale machen. Z.B. hat man in geordneten Räumen den Fortsetzungssatz von Bauer - Namioka zur Verfügung (s. BAUER [1958]).

In diesem Abschnitt betrachten wir eine "invariante" Form dieses Satzes. Sie hat für die Amenabilitätstheorie gegenüber den Sätzen des vorigen Paragraphen den Vorteil, daß beim Übergang von der Amenabilitätsbedingung zur Fortsetzungsaussage (s. (1) $\Rightarrow$ (2) in Satz (3.2)) die Positivität der linken Translation "gerettet" wird, so daß man in natürlicher Weise zurückschließen kann.

(3.1) Definition:

Ein topologischer Vektorraum E heißt geordnet, wenn in E ein konvexer, spitzer, abgeschlossener Kegel P mit der Spitze 0 ausgezeichnet ist. Eine lineare Darstellung einer Halbgruppe S auf E heißt positiv, wenn für alle $s \in S$ gilt: $s(P) \subset P$.

(3.2) Satz:

Sei S eine Halbgruppe, $X \subset \mathbb{R}^S$ ein linksinvarianter Teilraum mit einer Vektorraumtopologie, die feiner ist als die der punktweisen Konvergenz. Es sei $1 \in X$.

C sei eine Klasse von positiven vollen X -Darstellungen von S auf geordneten topologischen Vektorräumen.

Für die beiden folgenden Bedingungen gilt dann

(1) $\Rightarrow$ (2), und falls C zulässig ist und $\{f \in X: f < 1\}$ eine offene Nullumgebung ist¹⁾, sind (1) und (2) äquivalent.

(1) X ist linksamenabel.

(2) Sei $E \in C$, P der positive Kegel von E , und F ein invarianter Teilraum von E . Eine invariante Linearform μ auf F hat genau dann eine invariante, positive, stetige Fortsetzung μ' auf E , wenn eine konvexe, offene, invariante Nullumgebung U existiert, so daß $\mu|_{F \cap (U - P)}$ nach oben beschränkt ist.

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $E \in C$, $F \subset E$ ein invarianter Teilraum, und μ' eine invariante, positive, stetige Linearform auf E . Setze $U := \{x \in E: \mu'(x) < 1\}$. Dann ist $\mu'|_{F \cap (U - P)} < 1$, wie man sofort sieht. Mit μ' ist auch U invariant, die in (2) angegebene Bedingung für invariante Fortsetzbarkeit ist also notwendig. Für die umgekehrte Richtung wähle man eine konvexe, offene, invariante Nullumgebung U und ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $\mu|_{F \cap (U - P)} < c$ ist. Wegen $0 \in F \cap (U - P)$ ist dann $c > 0$. Durch $N = \{x \in F: \mu(x) = c\}$ ist ein invarianter Teilraum von E mit $N \cap (U - P) = \emptyset$ definiert. $A := U - P$ ist offen, invariant und

¹⁾: Für $X \subset m(S)$ ist das genau dann der Fall, wenn die Topologie von X feiner ist als die der Supremumsnorm.

konvex. $A \cap E_S$ ist nicht leer, da $0 \in A \cap E_S$. Nach (2.10)(3) existiert also eine abgeschlossene, invariante Hyperebene H in E mit $N \subset H$ und $H \cap A = \emptyset$. Wir können $H = \{x \in E: \mu'(x) = c\}$ schreiben, wobei μ' eine stetige Linearform auf E ist. Wegen $N \subset H$ ist μ' eine invariante Fortsetzung von μ . Aus $0 \in A$ erhält man $\mu'(x) < c$ für alle $x \in -P$, d.h. $x \in P$ impliziert $\mu'(x) \geq c$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei C nun zulässig (d.h. $X \in C$). Da die linke Translation ohnehin positiv ist, bedeutet dies also einfach, daß X introvertiert ist).

Als invarianten Teilraum F betrachten wir den Raum der Konstanten und definieren $\mu \in F'$ durch $\mu(1) = 1$. $U = \{f \in X: f < 1\}$ ist nach Voraussetzung eine konvexe, offene, invariante Nullumgebung.

Ist Q der positive Kegel von X und $f \in F \cap (U - Q)$, etwa $f = c \cdot 1$, und $g \in X$, $g \geq 0$ mit $f + g < 1$, dann ist $0 \leq g \leq 1 - c \cdot 1$, also $c \leq 1$ bzw. $\mu(f) \leq 1$.

Wegen (2) gibt es eine positive Linearform $\mu \in X'_S$ mit $\mu(1) = 1$. X ist also linksamenabel. //

(3.3) Bemerkung:

Im Sinne der "Philosophie" dieser Arbeit, lineare Darstellungen durch ihre Koeffizienten zu charakterisieren, wäre es befriedigend, wenn man auch positive Darstellungen durch Positivität

ihrer Koeffizienten beschreiben könnte.

Dies ist in der Tat möglich: seien in der Situation von (3.2) die positiven Kegel von E , E' bzw. X durch P , P' bzw. Q bezeichnet. Da P' die Polare von $-P$ ist, erhält man für $x \in E$ aus dem Bipolaren-satz die Aussage: $x \in P \Rightarrow$ für alle $\mu \in P'$ ist $\mu(x) \geq 0$. (Dabei wird u.a. benutzt, daß P in E abgeschlossen ist. Vgl. PERESSINI [1967], Prop. 1.19a). Eine volle X -Darstellung von S auf einem geordneten topologischen Vektorraum E ist also genau dann positiv, wenn für alle $s \in S$ gilt: $x \in P \Rightarrow$ für alle $\mu \in P'$ ist $\mu \circ x(s) \geq 0$, d.h. wenn $P' \circ P \subset Q$.

Eine genaue Betrachtung der Beweise von (3.2) und (2.10) zeigt, daß man in (3.2) nicht voll ausnützt, daß die Darstellungen in C volle X -Darstellungen sind. Was man tatsächlich braucht, geht aus der folgenden Definition und dem anschließenden Satz hervor, dessen Beweis wir weglassen.

(3.4) Definition:

Seien S und X wie in (3.2) gegeben, der positive Kegel von X sei Q . E sei ein geordneter topologischer Vektorraum mit positivem Kegel P und positivem Dualkegel P' . Eine lineare Rechtsdarstellung von S auf E heißt positive X -Darstellung,

wenn für alle $\mu \in P'$ $T_\mu (x \mapsto \mu x)$ ein positiver Operator aus $L(E, X)$ ist.

Ist E ein Ordnungseins-Raum mit der Ordnungseins e , so heißt eine positive X -Darstellung auf E normalisiert, wenn für alle $\mu \in P'$ $T_\mu(e) = 1$ ist.

(3.5) Satz:

Bei sonst gleichen Voraussetzungen ist Satz (3.2) auch richtig, wenn C eine Klasse von positiven X -Darstellungen von S auf geordneten topologischen Vektorräumen ist.

Die Richtung $(1) \Rightarrow (2)$ dieses Satzes wurde in dem Spezialfall einer kommutativen Halbgruppe und für $X = m(S)$ kürzlich in LANDSBERG-SCHIROTZEK [1975], Thm. 10, mit anderen Methoden bewiesen.

Im nicht-invarianten Fall folgt aus dem Satz von Bauer-Namioka als Korollar der Fortsetzungssatz von Krein-Rutman. Auch dafür gilt ein invariantes Analogon:

(3.6) Satz:

Seien S und X wie in Satz (3.2) gegeben. C sei eine Klasse von positiven X -Darstellungen. Von den folgenden Aussagen impliziert dann jede die nächste; falls C zulässig und die Menge $\{f \in X: f < 1\}$

offen ist, sind die Aussagen äquivalent.

- (1) X ist linksamenabel.
- (2) Für jedes $E \in \mathcal{C}$ mit positivem Kegel P , jeden invarianten Teilraum $F \subset E$ und jedes positive Funktional $\mu \in F'_S$ gilt: wenn $P^0 \cap F_S \neq \emptyset$ ist ¹⁾, dann läßt sich μ fortsetzen zu einem positiven Funktional $\mu' \in E'_S$.
- (3) Jedes $E \in \mathcal{C}$, für dessen positiven Kegel P $P^0 \cap E_S \neq \emptyset$ ist, enthält ein echtes invariantes Ordnungsideal, das maximal bzgl. dieser Eigenschaften ist.

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2): Wir haben eine konvexe, offene, invariante Nullumgebung U in E anzugeben, für die $\mu|_{F \cap (U - P)}$ nach oben beschränkt ist. Wählt man $x_0 \in P^0 \cap F_S$, so ist $U = x_0 - P$ eine solche Umgebung: man hat $U - P = x_0 - P$, zu $x \in F \cap (U - P)$ gibt es also ein $p \in P$ mit $x = x_0 - p$, d.h. $\mu(x) \leq \mu(x_0)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Falls E eindimensional ist, wähle man $I = \{0\}$ als das gesuchte Ordnungsideal. Andernfalls sei $x_0 \in E_S \cap P^0$, F der von x_0 aufgespannte Raum und $\mu \in F'_S$ durch $\mu(x_0) = 1$ definiert. Mit (2) erhält man eine positive Fortsetzung $\mu' \in E'_S$.

$I := \mu'^{-1}(0)$ ist eine invariante abgeschlossene Hyperebene und ein Ideal: sei $x \in I$, $y \in E$ und $0 \leq y \leq x$. Dann ist $0 \leq \mu'(y) \leq \mu'(x) = 0$, also $y \in I$.

¹⁾: Für $A \subset Z$, Z ein top. Raum, ist A^0 das Innere von A .

Sei C zulässig und $\{f \in X: f < 1\}$ offen. Dann gilt
(3) $\Rightarrow$ (1): Die Offenheit von $\{f \in X: f < 1\}$ ist
gleichwertig damit, daß 1 im Inneren des positiven
Kegels von X liegt. Also gibt es ein maximales
invariantes Ordnungsideal $I \neq X$. Wäre $1 \in I$, dann
wäre auch $\{f \in X: -1 < f < 1\} \subset I$ und damit $I = X$.

Der von I und 1 aufgespannte Teilraum ist wieder ein
invariantes Ordnungsideal, also gleich E . Dann
ist es klar, daß durch $\mu(f + c \cdot 1) = c$ ($f \in I$, $c \in \mathbb{R}$)
ein linksinvariantes Mittel über X definiert ist. //

Zum Schluß dieses Paragraphen geben wir noch ein Beispiel
an, das später noch genauer diskutiert wird. Der nach-
stehende Fixpunktsatz wurde in ARGABRIGHT [1968] bewiesen.
Seine Formulierung gab den Anstoß zur Einführung der
Koeffizienten in dieser Arbeit.

Unter einer kompakten, konvexen Menge K verstehen wir eine
nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge eines lokalkon-
vexen topologischen Vektorraumes. Es ist wohlbekannt, daß
für ein derartiges K die Menge $M_{A(K)}$ der Mittel
über $A(K)$ (s. §1) affin homöomorph zu K ist.

Schließlich sei noch auf (2.4)(1) für die Definition
des Begriffs der A -Darstellung von S, X durch stetige,
affine Funktionen auf K verwiesen.

(3.7) Satz:

Sei S eine Halbgruppe, X ein Teilraum von $m(S)$ mit $1 \in X$. Dann gilt für die beiden folgenden Aussagen
(1) $\Rightarrow$ (2), und falls X introvertiert ist, auch die Umkehrung.

(1) X ist linksamenabel.

(2) Jede A -Darstellung von S, X durch stetige, affine Funktionen auf einer kompakten, konvexen Menge K besitzt einen gemeinsamen Fixpunkt, d.h. ein $x \in K$ mit $sx = x$ für alle $s \in S$.

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2) ergibt sich aus (3.6). Als Klasse C wählen wir die zu den A -Darstellungen von S, X auf kompakten, konvexen Mengen K dualen Darstellungen, diese sind, wie schon in (2.4)(1) gesagt, volle (und trivialerweise positive) X -Darstellungen auf $A(K)$. Zu $A(K) \in C$ sei $F \subset A(K)$ der Teilraum der Konstanten, durch $\mu(1) = 1$ ist ein Funktional $\mu \in F'_S$ festgelegt. Nach Satz (3.6) gibt es eine Fortsetzung $\mu' \in A(K)'_S$, da der positive Kegel von $A(K)$ im Inneren die Funktion $1 \in F_S$ enthält. Der μ' entsprechende Punkt in K ist der gesuchte Fixpunkt.

(2) $\Rightarrow$ (1) stimmt genau mit dem Beweis von Theorem 2 in ARGABRIGHT [1968] überein, wo gezeigt ist, daß für introvertiertes X die Abbildung von S in die Menge der affinen, stetigen Abbildungen von

M_X in sich, die $s \in S$ auf l'_s abbildet, eine A-Darstellung von S, X auf M_X ist. //

(3.8) Bemerkung:

Wählt man in (3.7) für X den Raum $m(S)$, dann erhält man den Fixpunktsatz von Day (DAY [1961]).

(§ 4) Extremale Darstellungen.

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Fortsetzungsproblem für invariante positive Linearformen, die im Kegel aller positiven Linearformen extremal sind. Die Fragestellung ist aus mehreren Gründen von Interesse. Einmal benötigt man in der Theorie der geordneten Vektorräume häufig Aussagen über extremale positive Funktionale, und wenn Amenabilität ein "gutes" Invarianzprinzip sein soll, dann sollte sie auch hier das richtige Hilfsmittel für die entsprechenden invarianten Fortsetzungsaussagen sein. Außerdem gibt es seit den Arbeiten von GRANIRER [1965], [1967] eine Theorie der extremen Amenabilität, man hat daher auch von dieser Seite eine Motivation für die Fragestellung. Schließlich gibt es noch einen konkreteren Grund: Aus Satz (3.6) läßt sich ein Existenzsatz für invariante Wahrscheinlichkeitsmaße auf kompakten Räumen herleiten. Um daraus einen Fixpunktsatz zu gewinnen, möchte man invariante Punktmaße heben, also Maße, die extremal in der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße sind.

(4.1) Definition:

Sei E ein geordneter topologischer Vektorraum mit positivem Kegel P . $\mu \in E'$ heißt extremales Funktional, wenn μ auf einem Extremalstrahl des positiven

Kegels P' von E' liegt, d.h. wenn aus $\nu \in E'$,

$0 \leq \nu \leq \mu$ folgt: $\nu = c \cdot \mu$ für ein $c > 0$.

Die Menge der extremalen Funktionale in E' sei mit $ex P'$ bezeichnet.

(4.2) Definition:

Seien E und F geordnete topologische Vektorräume mit den positiven Kegeln P und Q . $T \in L(E, F)$ heißt interner Operator, falls $T'(ex Q') \subset ex P'$ gilt.

(4.3) Beispiele:

- (1) Für jeden geordneten topologischen Vektorraum E ist die Identität ein interner Operator von E in E .
- (2) Sind E, F Banachräume mit Ordnungseins-Norm und den Ordnungseinsen e bzw. f , und ist $B_+^1(E, F)$ die Menge der $T \in L(E, F)$ mit $T \geq 0$ und $T(e) = f$, dann ist jeder interne Operator T in $L(E, F)$ mit $T(e) = f$ ein Extrempunkt von $B_+^1(E, F)$. Dies folgt aus dem Satz von Krein-Milman und der schwachen Kompaktheit der Einheitskugeln von E' und F' .

Die Umkehrung ist i.a. falsch, nicht jeder Extrempunkt von $B_+^1(E, F)$ ist intern (LAZAR [1967]).

- (3) Für $E = C(X)$, $F = C(Y)$ (X, Y kompakte Räume) stimmen die Extrempunkte von $B_+^1(E, F)$ mit den internen, eins-treuen Operatoren überein (A. u. C. IONESCU-TULCEA [1961]).

(4.4) Definition:

Sei S eine Halbgruppe, $X \in \mathbb{R}^S$ ein linksinvarianter geordneter top. Vektorraum mit $1 \in X$. Eine Rechtsdarstellung von S auf einem geordneten topologischen Vektorraum E heißt interne X -Darstellung, wenn für alle extremalen Funktionale $\mu \in P'$ durch $x \mapsto \mu x$ ein interner Operator T_μ von E nach X erklärt ist.

Das folgende Lemma besagt in Verbindung mit dem obigen Beispiel (3) oder ähnlichen Beispielen, daß man oft auf natürliche Weise eine interne X -Darstellung erhält.

(4.5) Lemma:

Sei bei denselben Voraussetzungen über S und X wie in (4.4) eine positive X -Darstellung von S auf einem geordneten Vektorraum E gegeben, der eine Ordnungseins e besitzt. Wenn für alle $s \in S$ der s entsprechende Operator in $L(E, E)$ intern ist und $se = e$ erfüllt, und wenn die Basis $B = \{\mu \in P' : \mu(e) = 1\}$ des positiven Kegels P' von E' eine abgeschlossene Extrempunktmenge besitzt, dann ist die Darstellung eine interne X -Darstellung.

Beweis:

Man überzeugt sich leicht anhand der Definitionen, daß der durch $s \in S$ in E induzierte Operator genau dann intern ist, wenn für alle $\mu \in \text{ex}(B)$ gilt:

$qs \circ \mu \in \text{ex}(B)$ (qs ist das Auswertungsfunktional in s , vgl. (2.3)).

Es ist wohlbekannt, daß für Teilräume X von $m(S)$ $M_X = \overline{\text{conv}}(qS)$ gilt (s. DAY [1957]; conv bezeichnet die konvexe Hülle, der Abschluß bezieht sich auf die schwache Topologie.) Nach dem Satz von Milman ist dann $\text{ex}(M_X) \subset \overline{qS}$. Sei nun $\mu \in \text{ex}(B)$ gegeben. Zu $\nu \in \text{ex}(M_X)$ wähle ein Netz (s_α) mit $\lim_\alpha qs_\alpha = \nu$. Dann gilt $\lim_\alpha T'_\mu(qs_\alpha) = T'_\mu(\nu)$, d.h. $\lim_\alpha qs_\alpha \circ \mu = \nu \circ \mu \in \overline{\text{ex}(B)} = \text{ex}(B)$. Es ist klar, daß für beliebiges $\mu \in \text{ex } P'$ der Operator T'_μ dann ebenfalls intern ist, da B eine Basis des Kegels P' ist. //

Im Fortsetzungssatz für extremale invariante Funktionale werden noch zwei weitere Begriffe benötigt, die wir in der folgenden Definition einführen:

(4.6) Definition:

- (1) Sei S eine Halbgruppe, $X \subset \mathbb{R}^S$ ein linksinvarianter geordneter topologischer Vektorraum mit $1 \in X$. X heißt extrem linksamenabel, wenn es ein linksinvariantes Mittel über X gibt, welches extremal in M_X ist.
- (2) Ein geordneter lokalkonvexer Raum mit positivem Kegel P heißt Diniraum, wenn jede abgeschlossene Seite von P' die abgeschlossene konvexe Hülle ihrer Extremalstrahlen ist.

(4.7) Bemerkungen:

- (1) Für $X = m(S)$ wurde der Begriff der extremen Links-amenabilität zuerst in MITCHELL [1966] eingeführt. In GRANIRER [1965] und [1967] wurde er ausführlich studiert und u.a. algebraisch charakterisiert.
- (2) Diniräume wurden von PORTENIER [1971] eingeführt, die obige, etwas allgemeinere Definition findet sich bei FLÖSSER [1975]. Diniräume erlauben eine gewisse Umkehrung von Lemma (4.5): jede interne X -Darstellung einer Halbgruppe auf einem Diniraum durch positive Operatoren ist auch eine positive X -Darstellung. Den einfachen Beweis übergehen wir.

Ohne Beweis zitieren wir das folgende Resultat über Diniräume aus FLÖSSER [1975]:

(4.8) Lemma:

Sei F Teilraum eines Diniraumes E . Jedes extreme Funktional $\mu \in F'$, das eine positive, stetige Fortsetzung auf E besitzt, hat auch eine extremale Fortsetzung $\mu' \in E'$.

(4.9) Satz:

Sei S eine Halbgruppe, $X \subset \mathbb{R}^S$ ein linksinvarianter geordneter topologischer Vektorraum mit $1 \in X$ und C eine Klasse von internen X -Darstellungen von S

auf geordneten topologischen Vektorräumen.

Dann impliziert jede der folgenden Aussagen die nächste, wenn $X \subset m(S)$ und C zulässig ist, sind alle Aussagen äquivalent.

- (1) X ist extrem linksamenabel.
- (2) Sei $E \in C$ mit positivem Kegel P , F ein invarianter Teilraum. Genau dann hat ein invariantes Funktional $\mu \in \text{ex}(F' \cap P')$ eine invariante Fortsetzung $\mu' \in \text{ex } P'$, wenn es eine beliebige Fortsetzung $\bar{\mu} \in \text{ex } P'$ besitzt.
- (3) Sei $E \in C$ ein Diniraum, P und F wie in (2). Genau dann hat ein invariantes Funktional $\mu \in \text{ex}(F' \cap P')$ eine invariante Fortsetzung $\mu' \in \text{ex } P'$, wenn eine Fortsetzung $\bar{\mu} \in P'$ existiert.
- (4) Sei $E \in C$ ein geordneter lokalkonvexer Raum mit einer Ordnungseins e , P und F wie in (2), und es gelte $e \in (F \cap P)^0$. Dann gibt es zu jedem invarianten $\mu \in \text{ex}(F' \cap P')$ eine invariante Fortsetzung $\mu' \in \text{ex } P'$.

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $E \in C$, F ein invarianter Teilraum, $\mu \in \text{ex}(F' \cap P') \cap F'_S$ und $\bar{\mu} \in \text{ex } P'$ eine invariante Fortsetzung von μ . $\xi \in M_X$ sei ein extremales invariantes Mittel. Da die Darstellung von S auf E eine interne X -Darstellung ist, wird durch $\mu' := \xi \circ \bar{\mu} = T_{\bar{\mu}}'(\xi)$ ein extremales Funktional auf E definiert, welches nach (2.6) invariant ist. Völlig analog zu den Über-

legungen im Beweisschritt $(1) \Rightarrow (2)$ in (2.10) zeigt man, daß μ' tatsächlich eine Fortsetzung von μ ist.

$(2) \Rightarrow (3)$: Dies folgt unmittelbar aus Lemma (2.8).

$(3) \Rightarrow (4)$: In einem geordneten lokalkonvexen Raum mit Ordnungseins hat der positive Kegel nichtleeres Inneres. Mit JAMESON [1970], Theorem 3.8.6, folgt daraus, daß P' eine schwach kompakte Basis hat; E ist also ein Diniraum. Wegen $e \in (F \cap P)^0$ ist F ebenfalls ein geordneter Raum mit Ordnungseins, nach dem Satz von Krein-Rutman gibt es also zu $\mu \in \text{ex}(F' \cap P') \cap X_S'$ eine Fortsetzung $\mu \in P'$.

$(4) \Rightarrow (1)$: Sei nun zusätzlich $X \subset m(S)$ und sei C zulässig, d.h. $X \in C$. Als Teilraum F wählen wir den Raum der Konstanten und definieren $\mu \in F'$ durch $\mu(1) = 1$. Trivialerweise ist $1 \in (F \cap P)^0$ und μ ein extremales invariantes Funktional. Aus (4) folgt die Existenz einer Fortsetzung $\mu' \in \text{ex } P' \cap X_S'$, diese ist das gesuchte extremale invariante Mittel. //

Der vorangehende Satz ließe sich durch eine Bedingung erweitern, die eine Aussage über maximale invariante Ordnungs-ideale macht, und die der Bedingung (3) in (3.6) entspricht. Man benötigt dazu den Begriff des vollperfekten Ideals (s. NAGEL [1974]). Auf die Durchführung im einzelnen verzichten wir.

Als Anwendungsbeispiel für den Satz (4.9) zeigen wir

den Hauptsatz aus MITCHELL [1968]. Dazu brauchen wir die folgende Definition, die der aus (2.4)(1) entspricht.

(4.10) Definition:

Sei S eine Halbgruppe, $X \subset m(S)$ eine linksinvariante, abgeschlossene Teilalgebra mit $1 \in X$. Ein Halbgruppenhomomorphismus von S in die Menge der stetigen Abbildungen eines kompakten Raumes Y in sich heißt A-Darstellung von S, X durch stetige Abbildungen auf Y , wenn für alle $y \in Y$, $f \in C(Y)$ $f_y \in X$ gilt, wobei $f_y(s) = f(sy)$ sei ($s \in S$).

(4.11) Satz:

Seien S und X wie in (4.10) gegeben. Dann gilt für die folgenden Aussagen (1) $\Rightarrow$ (2), und falls die linke Translation in X eine interne X -Darstellung ist ¹⁾, auch (2) $\Rightarrow$ (1).

- (1) X ist extrem linksamenabel.
- (2) Jede A-Darstellung von S, X auf einem kompakten Raum Y durch stetige Abbildungen besitzt einen gemeinsamen Fixpunkt bzgl. S .

Beweis:

In (4.9) wählen wir für C die Klasse der zu den A-Darstellungen von S, X auf kompakten Räumen Y

¹⁾: In der Terminologie von MITCHELL [1968]: Die Algebra X ist M-introvertiert.

dualen Darstellungen, d.h. der durch $(sf)(y) = f(sy)$ auf $C(Y)$ definierten Rechtsdarstellungen. Diese sind interne X -Darstellungen: die Extremalstrahlen von $C(Y)_+^*$ sind von der Form $\{\lambda \cdot \varepsilon_y : \lambda > 0\}$ ($y \in Y$), die Bedingung $f_y \in X$ für $f \in C(Y)$, $y \in Y$ in der Definition (4.10) bedeutet also gerade $T_\mu \in L(C(Y), X)$ für alle $\mu \in \text{ex } C(Y)_+^*$. In M_X stimmen bekanntlich die multiplikativen Funktionale mit den extremalen überein, damit rechnet man leicht nach, daß für $\rho \in \text{ex}(M_X)$ und $y \in Y$ auch $\rho \in \varepsilon_y$ multiplikativ, d.h. also extremal ist.

Man erhält also die Aussage des Satzes aus (4.9), $(1) \Rightarrow (4)$, indem man sich ein $\mu \in \text{ex } C(Y)_+^* \cap C(Y)_S^*$ mit $\mu(1) = 1$ konstruiert. Dafür gilt dann $\mu = \varepsilon_x$ für ein $x \in Y$, das Fixpunkt unter S ist. //

(4.12) Bemerkung:

Zur Illustration von (4.11) sei bemerkt, daß das im Beweis konstruierte invariante Punktfunktional Extremalpunkt der kompakten, konvexen Menge aller invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße über Y ist. Diese Menge ist ein Simplex, da $C(Y)_S^*$ ein Teilvektorverband von $C(Y)^*$ ist. Der Beweis hierfür ist identisch mit dem von Lemma (2.11).

Den Satz (4.11) kann man als Aussage über gewisse Dar-

stellungen von S auf den Algebren $C(Y)$ verstehen. Diese Betrachtungsweise legt nahe, den Satz auf eine größere Klasse von Algebren zu übertragen.

(4.13) Definition:

Sei A ein archimedisch geordneter Vektorraum mit positivem Kegel P und einer Ordnungseins e . Wenn A zugleich eine Algebra mit e als Identität ist, und gilt:
 $P \cdot P \subset P$, $\{a \cdot a : a \in A\} \subset P$, dann heißt A geordnete Algebra.

Versieht man A mit der durch e induzierten Ordnungseins-Norm (dem Minkowskifunktional des Ordnungsintervalles $[-e, e]$), so erhält man einen geordneten normierten Raum (vgl. JAMESON [1970], 3.7.1), auf dem jedes positive Funktional stetig ist (dito, 5.1.3).

(4.14) Satz:

Sei S eine Halbgruppe, $X \subset m(S)$ eine linksinvariante, abgeschlossene Teilalgebra mit $1 \in X$ und C eine zulässige Klasse von internen X -Darstellungen auf geordneten Algebren.

Dann sind äquivalent:

- (1) X ist extrem linksamenabel.
- (2) Sei $A \in C$, $B \subset A$ eine invariante Teilalgebra mit $e \in B$. Dann kann jedes invariante, multiplikative, positive Funktional auf B zu einem ebensolchen Funktional auf A fortgesetzt werden.

Beweis:

Wir betrachten A als ordnungseins-normierten Raum. Nach JAMESON [1970], 5.1.5 und 5.2.2, lassen sich auf geordneten Algebren die multiplikativen Funktionale mit den extremalen Funktionalen μ mit $\mu(e) = 1$ identifizieren. Die Behauptung des Satzes ist also ein Spezialfall von (4.9), $(1) \Rightarrow (4)$.

In der Situation von (4.14) ist es einfach, die internen X -Darstellungen näher zu beschreiben. Es sind genau die positiven X -Darstellungen durch multiplikative Operatoren:

(4.15) Lemma:

Seien S und X wie in (4.14) gegeben, A sei eine geordnete Algebra. Eine lineare Rechtsdarstellung von S auf A ist genau dann eine interne X -Darstellung, wenn sie eine positive X -Darstellung ist und jedes $s \in S$ einen multiplikativen Operator aus $L(A, A)$ induziert.

Beweis:

Wir betrachten zuerst eine positive X -Darstellung durch multiplikative Operatoren. P sei der positive Kegel in A . Wir haben für extremale Funktionale φ und μ auf X bzw. A $\varphi, \mu \in \text{ex } P'$ zu zeigen. O.E. ist $\varphi \in \text{ex}(M_X)$ und $\mu(e) = 1$, d.h. φ und μ können als multiplikativ vorausgesetzt werden. Dann gilt

für $s \in S$ und $x, y \in A$: $(\mu_{xy})(s) = \mu(s(xy)) = \mu(sx \cdot sy) = ((\mu_{sx}) \cdot (\mu_{sy}))(s)$. Damit schließt man: $(\varphi \circ \mu)(xy) = \varphi(\mu_{xy}) = \varphi((\mu_{sx}) \cdot (\mu_{sy})) = \varphi(\mu_{sx}) \cdot \varphi(\mu_{sy}) = (\varphi \circ \mu)(x) \cdot (\varphi \circ \mu)(y)$, d.h. $\varphi \circ \mu$ ist multiplikativ und damit in $\text{ex } P'$.

Sei umgekehrt eine interne X -Darstellung von S auf A gegeben. Nach der Bemerkung in (4.7)(3) liegt dann insbesondere eine positive X -Darstellung vor.

Für $\mu \in \text{ex } P'$, also insbesondere für multiplikatives $\mu \in P'$, ist dann T_μ ein interner Operator, d.h. es gilt für alle $\varphi \in \text{ex}(M_X)$ $\varphi \circ \mu \in \text{ex } P'$. Damit ist für alle $s \in S$ $\varphi \circ \mu$ multiplikativ; für $x, y \in A$ gilt also: $\mu(sx \cdot sy) = \mu(sx) \cdot \mu(sy) = (\varphi \circ \mu)(x) \cdot (\varphi \circ \mu)(y) = (\varphi \circ \mu)(xy) = \mu(s(xy))$. Da $\text{ex } P'$ die Punkte von A trennt, ist $sx \cdot sy = s(xy)$. //

In FLÖSSER [1975] wurde ein Fortsetzungssatz für extremale Funktionale auf Diniverbänden bewiesen. (Ein Diniverband ist ein Diniraum, der in derselben Ordnung auch ein lokal-konvexer Vektorverband ist.) Auch dieser Satz besitzt eine invariante Version:

(4.16) Satz:

Sei S eine Halbgruppe, $X \subset m(S)$ ein abgeschlossener Teilvektorverband mit $1 \in X$ und C eine zulässige Klasse von internen X -Darstellungen von S auf Diniverbänden.

Dann sind äquivalent:

- (1) X ist extrem linksamenabel.
- (2) Sei $E \in \mathcal{C}$, F ein invarianter Teilvektorverband von E .
Dann kann jeder positive, invariante Verbandshomomorphismus $\mu \in F'$ zu einem positiven, invarianten Verbandshomomorphismus $\mu' \in E'$ fortgesetzt werden.

Beweis:

Bei lokalkonvexen Vektorverbänden sind die positiven, stetigen Verbandshomomorphismen mit den extremalen Funktionalen identisch (s. SCHAEFER [1967]). Aus Satz (4.9) (1) $\Leftrightarrow$ (3) und FLÖSSER [1975], wo für Diniverbände die zur Anwendung dieser Äquivalenz notwendige Fortsetzbarkeit von Verbandshomomorphismen auf Teilvektorverbänden gezeigt ist, folgt die Behauptung des Satzes.

(4.17) Bemerkungen:

- (1) Bei der Charakterisierung linksamenabler Räume haben wir vor den positiven X -Darstellungen auch Darstellungen auf beliebigen topologischen Vektorräumen betrachtet. Im Falle der extremen Linksamenabilität ist dies in derselben Allgemeinheit nicht möglich, da der Begriff "extremales Funktional" ja erst mit Hilfe eines positiven Kegels eingeführt wird. Für Darstellungen auf Banachräumen kann man jedoch einen zu (2.10) analogen Satz beweisen.

Dazu muß man eine neue Klasse von X-Darstellungen einführen: Sei S eine Halbgruppe, $X \subset m(S)$ ein abgeschlossener Teilraum mit $1 \in X$. Eine lineare Rechtsdarstellung von S auf einem Banachraum E heißt externe X-Darstellung, wenn für alle $\mu \in \text{ex } B(E')$ der Operator $T_\mu: E \rightarrow X$ ($x \mapsto \mu x$) ein externer Operator ist. Dabei heißt ein Operator $T: E \rightarrow X$ extern, wenn $T'(\text{ex } B(X')) \subset \text{ex } B(E')$ gilt. Mit Hilfe der externen X-Darstellungen lassen sich Fortsetzungssätze für invariante Funktionale in $\text{ex } B(E')$ beweisen. Da die Beweise jedoch nur auf einer sehr naheliegenden Kombination der Methoden von §2 und §4 beruhen, verzichten wir auf Einzelheiten. In der Mehrzahl der Anwendungen spielen ohnehin Ordnungsstrukturen auf den Darstellungsräumen eine Rolle.

- (2) Noch ein weiterer Typ von extremalen Darstellungen bietet sich zur Untersuchung an: Statt wie in der Definition (4.4) vorzugehen, wäre es natürlicher gewesen, bei gleichen Voraussetzungen folgendermaßen zu definieren: Sei Q der positive Kegel von X , P derjenige von E . Dann induziert der Kegel $K = \{T \in L(E, X): T(P) \subset Q\}$ eine Ordnung in $L(E, X)$, und man kann von (bzgl. K) extremalen Operatoren sprechen. Eine Rechtsdarstellung von S auf E heißt dann extremale X-Darstellung, wenn

für alle $\mu \in \text{ex } P'$ der Operator T_μ in K extremal ist. Man sieht leicht, daß dieser Begriff die internen X -Darstellungen umfaßt. Für extremale X -Darstellungen lassen sich jedoch mit der hier verwendeten Beweismethode i.a. keine invarianten Fortsetzungssätze herleiten, da man in diesem Falle bei der Arens-Multiplikation extremer Funktionale nicht notwendig wieder ein extremes Funktional erhält.

Ein sehr einfaches Beispiel dafür ist das folgende:

Sei $C = \text{conv}\{(-1,0), (1,0), (1,1), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$, p die Restriktion auf C der Projektion auf die 1. Koordinate in $\mathbb{R}^2$. p ist extremal in der Menge der affinen, stetigen Abbildung von C in $\mathbb{C}$, daher ist die folgende Darstellung von $S = \{p\}$ auf $E = A(C)$ bzgl. $X = \mathbb{R}^S = \mathbb{R}$ eine extreme X -Darstellung: $p(a) = a \cdot p$ ($a \in A(C)$). Durch $\varphi(1) = 1$ ist ein extremes Funktional auf X bestimmt, $\varepsilon_{(0,1)}$ ist ein extremes Funktional auf E , und man hat $\varphi \circ \varepsilon_{(0,1)} = \varepsilon_{(0,0)}$, ein Funktional, das nicht extremal ist.

Teil II:

SPEZIELLE DARSTELLUNGEN

In diesem Teil der Arbeit betrachten wir stetige Darstellungen topologischer Halbgruppen. Unser Ziel ist eine nähere Beschreibung einiger Klassen von X-Darstellungen für Räume X von gleichmäßig stetigen bzw. fastperiodischen Funktionen auf topologischen Halbgruppen.

(§ 5) Gleichmäßig stetige Koeffizienten.

Invariante Mittel über der Menge der gleichmäßig stetigen Funktionen auf einer lokalkompakten topologischen Gruppe spielen in der abstrakten harmonischen Analyse seit langem eine wesentliche Rolle.

Etwa um 1966 fand ihre Theorie einen vorläufigen Abschluß, als Namioka bewies, daß die Linksamenabilität für alle folgenden Räume von Funktionen auf einer lokalkompakten Gruppe G untereinander äquivalent ist: $L^\infty(G)$ (der Raum der wesentlich beschränkten Borelmeßbaren Funktionen), $C(G)$, $LUC(G)$ (der Raum der links-gleichmäßig stetigen Funktionen, s. (5.2)) und $UC(G)$ (der Raum der gleichmäßig stetigen Funktionen). Vgl. hierzu GREENLEAF [1969].

Etwa zur gleichen Zeit stellte RICKERT [1967] den Zusammenhang zwischen der Linksamenabilität dieser Räume und einer verschärften Form des Fixpunktsatzes von Day her. MITCHELL [1970] hat dieses Resultat auf

topologische Halbgruppen ausgedehnt.

Mit Hilfe der in Teil I entwickelten Begriffe werden in diesem Paragraphen die Ergebnisse von Mitchell hergeleitet, außerdem erhalten wir mit denselben Hilfsmitteln den Beweis zweier invarianter Fortsetzungssätze von LAU [1974] sowie weitere verwandte Sätze.

(5.1) Definition:

- (1) Eine topologische Halbgruppe ist eine Halbgruppe S , zusammen mit einer Topologie, für welche die Abbildung $S \times S \rightarrow S ((s,t) \mapsto st)$ einzeln (d.h. komponentenweise) stetig ist.

Gelegentlich wird in der Literatur der Begriff "topologische Halbgruppe" für den Fall reserviert, daß die Multiplikation als Abbildung von $S \times S$ in S stetig ist. Dafür soll im folgenden der Ausdruck "simultan stetig" stehen, um Verwechslungen auszuschließen.

- (2) Eine Aktion einer topologischen Halbgruppe S auf einem topologischen Raum Y ist ein Halbgruppenhomomorphismus von S in die Menge der stetigen Abbildungen von Y in Y . Wir sagen auch: S operiert auf Y und schreiben dafür $S \times Y \rightarrow Y$. Die Ausdrücke "einzeln stetige Aktion" und "simultan stetige Aktion" sind sinngemäß zu (1) zu verstehen. Ist Y zusätzlich eine konvexe Teilmenge eines Vektorraumes, so heißt die Aktion affin, wenn

für alle $s \in S$ die entsprechende Abbildung von Y in Y affin ist.

Die duale Darstellung zu einer Aktion ist die durch $f \mapsto f \cdot s$ ($f \in C(Y)$, $s \in S$) auf $C(Y)$ definierte Rechtsdarstellung von S ; die Restriktion dieser Abbildung auf einen linksinvarianten Teilraum X von $C(S)$ ist die duale Darstellung auf X .

- (3) Eine Rechtsdarstellung einer topologischen Halbgruppe S auf einem topologischen Vektorraum E heißt stetig, wenn die Abbildung $S \times E \rightarrow E$ komponentenweise stetig ist.

(5.2) Definition:

Sei S eine topologische Halbgruppe. Für $f \in C(S)$ definiere $L_f: S \rightarrow C(S)$ durch $s \mapsto L_s f$. Es sei

$$LUC(S) = \{f \in C(S): L_f \text{ ist stetig bzgl. der Normtop. in } C(S)\}.$$

$$WLUC(S) = \{f \in C(S): L_f \text{ ist stetig bzgl. der schwachen Topologie in } C(S)\}.$$

$$LMC(S) = \{f \in C(S): L_f \text{ ist stetig bzgl. der Topologie } \sigma(C(S), \text{ex } M_{C(S)}) \text{ in } C(S)\}.$$

(5.3) Lemma:

Die eben definierten Räume sind linksinvariante, abgeschlossene Teilräume von $C(S)$ und enthalten die Konstanten. Die Funktion 1 ist jeweils eine Ordnungseins. $LUC(S)$ und $LMC(S)$ sind überdies Teilalgebren von $C(S)$.

Für den einfachen Beweis verweisen wir auf MITCHELL [1970].

(5.4) Bemerkung:

Zur Orientierung erwähnen wir die folgenden Resultate aus MITCHELL [1970], obwohl wir sie nicht weiter benötigen. Nur der Beweis von (3) ist schwierig.

- (1) Es gilt $LUC(S) \subset WLUC(S) \subset LMC(S) \subset C(S)$.
- (2) Für eine kompakte Halbgruppe S mit simultan stetiger Multiplikation ist $LUC(S) = C(S)$.
- (3) Wenn S eine lokalkompakte topologische Gruppe ist, gilt $LUC(S) = WLUC(S) = LMC(S)$.

Der folgende Satz ermöglicht nun den Anschluß an die Ergebnisse von Teil I. Die Beweisargumente sind aus der zitierten Arbeit von Mitchell adaptiert.

(5.5) Satz:

Sei S eine topologische Halbgruppe, K eine konvexe, kompakte Menge in einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum und Y ein kompakter Raum.

Durch den Übergang zur dualen Darstellung erhält man:

- (1) aus einer affinen, simultan stetigen Aktion von S auf K eine positive $LUC(S)$ -Darstellung auf $A(K)$.
- (2) aus einer affinen, einzeln stetigen Aktion von S auf K eine positive $WLUC(S)$ -Darstellung auf $A(K)$.

- (3) aus einer simultan stetigen Aktion von S auf Y
eine interne $LUC(S)$ -Darstellung auf $C(Y)$.
- (4) aus einer einzeln stetigen Aktion von S auf Y
eine interne $LMC(S)$ -Darstellung auf $C(Y)$.

Beweis:

Statt (1) zeigen wir zuerst die weitergehende Behauptung (3). Dazu sei Y kompakt und $S \times Y \rightarrow Y$ eine simultan stetige Aktion. Die extremalen Funktionale auf $C(Y)$ sind die positiven Vielfachen von ε_x , $x \in Y$. Es genügt daher, für $x \in Y$ zu zeigen, daß die Abbildung $T_{\varepsilon_x} : f \mapsto \varepsilon_x \circ f$ in $L(C(Y), LUC(S))$ liegt. $T_{\varepsilon_x} \in L(C(Y), C(S))$ sieht man (auch ohne die simultane Stetigkeit) unmittelbar aus den Definitionen.

Wir nehmen an, es gäbe ein $f \in C(Y)$ mit $\varepsilon_x \circ f =: f' \notin LUC(S)$. Dann gibt es also ein konvergentes Netz $(s_\alpha)_{\alpha \in A} \rightarrow s$ in S und ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $\alpha \in A$ $\|1_{s_\alpha} f' - 1_s f'\| \geq \varepsilon$ ist. Dann gibt es weiterhin ein Netz $(t_\alpha)_{\alpha \in A}$ in S , das für alle $\alpha \in A$ $|f'(s_\alpha t_\alpha) - f'(s t_\alpha)| \geq \varepsilon$ erfüllt. Setzt man $y_\alpha = t_\alpha x$, so enthält $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ wegen der Kompaktheit von Y ein Teilnetz $(y_\beta)_{\beta \in B}$, das gegen ein $y \in Y$ konvergiert. Für alle $\beta \in B$ gilt dann $|f(s_\beta y_\beta) - f(s y_\beta)| \geq \varepsilon$. Andererseits konvergiert $(f(s y_\beta))_{\beta \in B}$ gegen $f(s y)$, und wegen der simultanen Stetigkeit der Aktion konvergiert $(f(s_\beta y_\beta))_{\beta \in B}$ ebenfalls gegen $f(s y)$, ein Widerspruch. Daher muß $T_{\varepsilon_x}(C(Y)) \subset LUC(S)$ sein.

Der Beweis von Behauptung (1) ist in dem von (3) enthalten, wenn man für Y die konvexe, kompakte Menge K wählt und nur die T_{ε_x} mit $x \in \text{ex}(K)$ betrachtet. Behauptung (2) kann man folgendermaßen einsehen: Es genügt wieder, für $x \in K$, $a \in A(K)$ $\varepsilon_x \otimes a = a' \in \text{WLUC}(S)$ zu zeigen, alles übrige folgt direkt aus den Definitionen. Sei also $(s_\alpha) \rightarrow s$ ein konvergentes Netz in S . Um die schwache Konvergenz von $l_{s_\alpha} a'$ gegen $l_s a'$ zu erhalten, reicht es aus, für alle $\mu \in M_{\text{WLUC}(S)}$ $\mu(l_{s_\alpha} a') \rightarrow \mu(l_s a')$ zu zeigen. ($\text{WLUC}(S)$ ist ein Ordnungseins-Norm-Raum, also erzeugt die positive Seite der dualen Einheitskugel den Dualraum.) Nun ist aber die konvexe Hülle von qS schwach dicht in $M_{\text{WLUC}(S)}$, und da die Funktionen $l_{s_\alpha} a'$ für alle stetig und affin sind, braucht man nur noch für alle $t \in S$ $qt(l_{s_\alpha} a') \rightarrow qt(l_s a')$ zu wissen. Anders geschrieben heißt das $a(s_\alpha tx) \rightarrow a(stx)$, und dies folgt aus der einzelnen Stetigkeit der Aktion $S \times K \rightarrow K$. Der Beweis von (4) verläuft ganz ähnlich, wir führen ihn nicht eigens vor. //

(5.6) Bemerkungen:

- (1) Auf der kompakten, konvexen Menge $M_{\text{LUC}(S)}$ ist die Aktion $(s, \mu) \mapsto l'_s(\mu)$ affin und simultan stetig: Sei $(s_\alpha)_{\alpha \in A} \rightarrow s$ ein konvergentes Netz in S , $(\mu_\beta)_{\beta \in B} \rightarrow \mu$ ein konvergentes Netz in $M_{\text{LUC}(S)}$ und

$f \in \text{LUC}(S)$ beliebig. Für die simultane Stetigkeit der Aktion ist zu zeigen: $l'_{s_\alpha}(\mu_\beta)(f) \rightarrow l'_s(\mu)(f)$.
Nun ist $|\mu_\beta(l_{s_\alpha} f) - \mu(l_s f)| \leq |\mu_\alpha(l_{s_\alpha} f) - \mu_\beta(l_s f)| +$
 $+ |\mu_\beta(l_s f) - \mu(l_s f)| \leq \|l_{s_\alpha} f - l_s f\| + |\mu_\beta(l_s f) - \mu(l_s f)|$,
und beide Terme auf der rechten Seite gehen gegen 0.

Damit folgt die Behauptung. Da man $\text{LUC}(S)$ mit $A(M_{\text{LUC}(S)})$ identifizieren kann, erhält man als Folgerung aus (5.5)(1), daß die linke Translation in $\text{LUC}(S)$ eine positive $\text{LUC}(S)$ -Darstellung ist.

- (2) Auf ähnliche Weise kann man zeigen, daß die linke Translation in $\text{WLUC}(S)$ eine positive $\text{WLUC}(S)$ -Darstellung ist, und daß die linke Translation auf X eine interne X -Darstellung ist für $X \in \{\text{LUC}(S), \text{LMC}(S)\}$.

(5.7) Korollar:

Für jede topologische Halbgruppe ist äquivalent:

- (1) $\text{LUC}(S)$ ist linksamenabel.
- (2) Für jede affine, simultan stetige Aktion von S auf einer kompakten, konvexen Menge K gibt es einen gemeinsamen Fixpunkt bzgl. S in K .

Beweis:

Die Behauptung folgt durch Einsetzen von (5.5)(1) und (5.6)(1) in Satz (3.7).

Dies ist Theorem 2 in MITCHELL [1970]. Auf dieselbe Weise erhält man auch die Theoreme 1, 3 und 4 unter resp.

Benutzung von (3.7) und (4.11).

Als nächstes betrachten wir volle $LUC(S)$ -Darstellungen auf beliebigen topologischen Vektorräumen.

(5.8) Lemma:

Sei eine stetige Rechtsdarstellung einer topologischen Halbgruppe S auf einem topologischen Vektorraum E gegeben. Wenn zu einem $\mu \in E'$ eine subinvariante Sublinearform p existiert, so daß $\mu \leq p$ ist, dann gilt: $T_\mu \in L(E, LUC(S))$.

Beweis:

Wegen der Stetigkeit von $Sx \in E \rightarrow E$ ist für $x \in E$ zunächst $T_\mu(x) \in C(S)$. Daraus ergibt sich dann $T_\mu(x) \in LUC(S)$: Sei $(s_\alpha) \rightarrow s$ ein konvergentes Netz in S . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|1_{s_\alpha} T_\mu(x) - 1_s T_\mu(x)\| &= \sup_{t \in S} |\mu(s_\alpha t) - \mu(st)| = \\ &= \sup_{t \in S} |\mu(t(s_\alpha x - sx))| \leq \sup_{t \in S} |p(t(s_\alpha x - sx))| \leq |p(s_\alpha x - sx)|. \end{aligned}$$

$p(s_\alpha x - sx)$ konvergiert gegen 0, da p (nach Definition) stetig ist, also ist $T_\mu(x) \in LUC(S)$.

Die Stetigkeit von T_μ ergibt sich ganz ähnlich:

Sei $(x_\alpha) \rightarrow 0$ ein gegen 0 konvergentes Netz in E , dann ist

$$\|T_\mu(x_\alpha)\| = \sup_{s \in S} |\mu(sx_\alpha)| \leq \sup_{s \in S} |p(sx_\alpha)| < |p(x_\alpha)|, \text{ d.h. } T_\mu(x_\alpha) \rightarrow 0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. //

(5. 9) Korollar:

Jede stetige Rechtsdarstellung einer topologischen Halbgruppe S durch kontrahierende Operatoren auf einem Banachraum E ist eine volle $LUC(S)$ -Darstellung.

Beweis:

Zu $\mu \in E'$ wähle man sich als majorisierende Sublinearform $p(x) = \|\mu\| \|x\|$. Da die S darstellenden Operatoren kontrahierend sind, ist p subinvariant.

Der folgende Satz ist das Hauptergebnis aus LAU [1974]:

(5.10) Satz:

Für jede topologische Halbgruppe S ist äquivalent:

- (1) $LUC(S)$ ist linksamenabel.
- (2) Für jede stetige Rechtsdarstellung von S auf einem topologischen Vektorraum E gilt: Ist p eine subinvariante Sublinearform auf E , $F \subset E$ ein invarianter Teilraum von E und $\mu \in F'_S$ mit $\mu \leq p|_F$, dann gibt es eine Fortsetzung $\mu' \in E'_S$ von μ mit $\mu' \leq p$.
- (3) Für jede stetige Rechtsdarstellung von S durch Kontraktionen auf einem Banachraum E trennt E'_S die Punkte von E_S .

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2) folgt aus dem Beweis von (2.10), wenn man $X = LUC(S)$ nimmt. (Satz (2.10) war der Ein-

fachheit halber so formuliert, daß er sich nur auf volle $LUC(S)$ -Darstellungen anwenden läßt.

Aus dem Beweis sieht man aber, daß $T_\mu \in L(E, LUC(S))$ nur für von p majorisierte Funktionale $\mu \in E'$ benötigt wird.)

(2) $\Rightarrow$ (3): Korollar (5.9).

(3) $\Rightarrow$ (1) folgt aus (2.11) und (5.6)(1). //

Der nächste Satz macht eine (5.10) entsprechende Aussage über extreme Amenabilität.

Unter einer geordneten Banachalgebra verstehen wir eine geordnete Algebra, deren zugrundeliegender topologischer Vektorraum ein Banachraum ist.

(5.11) Satz:

Für jede topologische Halbgruppe S ist äquivalent:

(1) $LUC(S)$ ist linksamenabel.

(2) Für jede geordnete Banachalgebra A und jede stetige Rechtsdarstellung von S auf A durch positive, multiplikative Kontraktionen gilt: Ist B eine invariante Teilalgebra von A , die die Identität enthält, und μ ein positives, multiplikatives, invariantes Funktional auf B , dann gibt es eine Fortsetzung $\mu' \in A'$ von μ mit den gleichen Eigenschaften.

Beweis:

Man hat nur Satz (4.14), Lemma (4.15) und

Korollar (5.9) zu kombinieren, und dabei zu beachten, daß $LUC(S)$ eine Banachalgebra ist, auf der die linke Translation multiplikativ operiert. //

Um ein Beispiel für eine Klasse von X -Darstellungen zu haben, bei dem X nicht ein Banachraum von beschränkten Funktionen ist, betrachten wir noch eine Variante von (5.8).

(5.12) Definition:

Sei S eine topologische Halbgruppe. Der Raum aller stetigen (nicht notwendig beschränkten) Funktionen auf S , versehen mit der Topologie der lokal-gleichmäßigen Konvergenz (d.h. der Konvergenz auf kompakten Teilmengen) heiße $CC(S)$.

Mit $LCC(S)$ bezeichnen wir den Teilraum aller links lokal-gleichmäßig stetigen Funktionen auf S ; das sind diejenigen $f \in CC(S)$, für die $L_f: S \rightarrow CC(S)$ ($s \mapsto l_s f$) stetig ist.

Eine stetige Rechtsdarstellung von S auf einem topologischen Vektorraum E heißt lokal-gleichmäßig stetig, wenn für jedes Netz $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ in E , das gegen 0 konvergiert, gilt: Zu jeder Nullumgebung U in E und jeder kompakten Teilmenge S' von S gibt es ein $\alpha_0 \in A$, so daß für alle $\alpha \in A$ mit $\alpha > \alpha_0$ $S'(y_\alpha) \subset U$ ist.

(5.13) Bemerkung:

$LCC(S)$ wurde im Zusammenhang mit invarianten Mitteln von GROSSMAN [1973] eingeführt.

Es ist klar, daß $LCC(S)$ ein linksinvarianter Teilraum von $CC(S)$ ist, der die Konstanten enthält.

(5.14) Lemma:

Jede lokal-gleichmäßig stetige Darstellung einer topologischen Halbgruppe S auf einem topologischen Vektorraum E ist eine volle $LCC(S)$ -Darstellung.

Wenn für alle kompakten $S' \subset S$ auch $S' \cdot S'$ kompakt ist (z.B. wenn die Multiplikation in S simultan stetig ist), dann ist die linke Translation in $LCC(S)$ eine lokal-gleichmäßig stetige Darstellung von S .

Beweis:

Aus der Stetigkeit von $SxE \rightarrow E$ sieht man leicht, daß $E' \otimes E \subset CC(S)$ gilt. Sei $\mu \in E'$ und $x \in E$, dann ist die lokal-gleichmäßige Stetigkeit von $\mu \otimes x$ zu zeigen. Dazu sei $(s_\alpha)_{\alpha \in A} \rightarrow s$ ein konvergentes Netz in S und S' eine kompakte Teilmenge von S . Wähle zu $\varepsilon > 0$ eine Nullumgebung U in E , so daß $|\mu(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in U$ ist. Wegen der lokal-gleichmäßigen Stetigkeit der Darstellung gibt es ein $\alpha_0 \in A$, so daß für alle $\alpha > \alpha_0$ und $t \in S'$ $t(s_\alpha x - sx) \in U$ ist. Das heißt also, daß

$$\lim_{\alpha \in A} (\sup_{t \in S'} |\mu(t(s_\alpha x - sx))|) = 0$$

ist. Die Abbildung $s \mapsto l_s(\mu x)$ ist also stetig, μx liegt in $LCC(S)$.

Genau dieselbe Abwandlung dieses Argumentes wie an der entsprechenden Stelle in Lemma (5.8) liefert die Stetigkeit der Abbildung $T_\mu: E \rightarrow LCC(S)$.

Die Darstellung ist also eine volle $LCC(S)$ -Darstellung.

Der zweite Teil der Behauptung folgt so:

Sei $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein gegen 0 konvergentes Netz in $LCC(S)$, S' eine kompakte Teilmenge von S und U eine Nullumgebung in $LCC(S)$, die o.E. von der Form $U =$

$$= \{f \in LCC(S) : \sup_{t \in S''} |f(t)| < \varepsilon\} \text{ für ein } \varepsilon > 0 \text{ und eine}$$

kompakte Teilmenge S'' von S ist. Gesucht ist ein

$\alpha_0 \in A$, so daß für $\alpha > \alpha_0$ und $s \in S'$ gilt: $l_s f_\alpha \in U$,

d.h. $\sup_{t \in S''} |l_s f_\alpha(t)| < \varepsilon$. Wir setzen $S^* = S' \cup S''$.

$S^* \cdot S^*$ ist nach Voraussetzung kompakt, da (f_α) gegen Null konvergiert, gibt es also ein $\alpha_0 \in A$ mit

$$\sup_{s, t \in S^*} |f_\alpha(st)| < \varepsilon \text{ für alle } \alpha > \alpha_0. \text{ Daraus folgt}$$

die Behauptung. //

Ganz analog zu dem vorher besprochenen Beispiel $X = LUC(S)$ lassen sich aus dieser Aussage in Verbindung mit den Sätzen (2.10), (3.6) und (4.9) Fortsetzungssätze für invariante Funktionale herleiten, die die Amenabilität bzw. extreme

Amenabilität von $LCC(S)$ charakterisieren. Da diese Sätze sich nicht sehr wesentlich von den bisherigen dieses Paragraphen unterscheiden - es werden lediglich lokalgleichmäßig stetige anstelle der stetigen Darstellungen verwendet - führen wir sie nicht eigens an.

(§ 6) Fastperiodische Koeffizienten.

Neben den gleichmäßig stetigen Funktionen spielen bei der Untersuchung topologischer Gruppen und Halbgruppen die fastperiodischen Funktionen seit langem eine ebenso wichtige Rolle (s. EBERLEIN [1949], BERGLUND-HOFMANN [1967], BURCKEL [1970]).

In diesem Paragraphen werden wir daher Darstellungen von topologischen Halbgruppen mit fastperiodischen bzw. schwach fastperiodischen Koeffizienten untersuchen. Die Anwendungsmöglichkeiten der sich ergebenden Fortsetzungssätze sind gegenüber denen der entsprechenden Sätze in §5 etwas eingeschränkt, da die Klasse der betrachteten Darstellungen wegen der schärferen Forderungen an die Koeffizienten kleiner ist. Als Gewinn erhält man demgegenüber, daß die Linksamenabilität des Raumes der fastperiodischen (bzw. schwach fastperiodischen) Funktionen leichter zu erreichen ist. Während z.B. der Satz (5.10) im Fall einer diskreten Gruppe nur dann ein brauchbares Hilfsmittel ist, wenn die Gruppe amenabel ist, beinhaltet sein Gegenstück (6.7) in diesem Abschnitt eine Fortsetzungsaussage mit Invarianzbedingung, die für beliebige diskrete Gruppen gilt.

(6.1) Definition:

Sei S eine topologische Halbgruppe.

$AP(S) = \{f \in C(S) : \{1_s f : s \in S\} \text{ ist relativ normkompakt in } C(S)\}$ heißt Raum der fastperiodischen Funktionen auf S .

$WAP(S) = \{f \in C(S) : \{1_s f : s \in S\} \text{ ist schwach relativ kompakt in } C(S)\}$ heißt Raum der schwach fastperiodischen Funktionen auf S .

Die folgenden Eigenschaften dieser Räume sind wohlbekannt:

(6.2) Lemma:

(1) $AP(S)$ und $WAP(S)$ sind linksinvariante, abgeschlossene Teilräume von $C(S)$ und enthalten die Konstanten.

Es gilt $AP(S) \subset WAP(S)$.

(2) Falls S eine Identität besitzt, sind $AP(S)$ und $WAP(S)$ Teilalgebren von $C(S)$. Beide Räume besitzen in diesem Falle höchstens ein linksinvariantes Mittel.

(3) Es gilt $AP(S) \subset LUC(S)$ und $WAP(S) \subset WLUC(S)$.

Beweis:

Für (1) vgl. BURCKEL [1970], Lemma 1.6.

(2) ist in DE LEEUW-GLICKSBERG [1967] bewiesen

(Thm. 5.8), für (3) s. Thm. 1.7 (iii) in dem obigen Buch von Burckel.

Aus der letzten Beziehung geht insbesondere hervor, daß die Linksamenabilität von $LUC(S)$ [$WLUC(S)$] die von $AP(S)$

$[WAP(S)]$ impliziert. Man muß nur jeweils ein invariantes Mittel auf den entsprechenden Teilraum einschränken.

Die folgende Klasse von Darstellungen wurde in DE LEEUW-GLICKSBERG [1961] eingeführt, implizit erscheint sie schon in EBERLEIN [1949].

(6.3) Definition:

Eine stetige Rechtsdarstellung einer topologischen Halbgruppe S auf einem topologischen Vektorraum E heißt [schwach] fastperiodische Darstellung, wenn für alle $x \in E$ die Menge $\{sx: s \in S\}$ [schwach] relativ kompakt ist.

(6.4) Beispiele:

- (1) Die linke Translation in $AP(S)$ $[WAP(S)]$ ist eine [schwach] fastperiodische Darstellung.

Beweis:

Die Stetigkeit beider Darstellungen folgt aus (6.2)(3) und der schon in §5 gezeigten Stetigkeit der linken Translationen in $LUC(S)$ und $WLUC(S)$. Da $AP(S)$ normabgeschlossen in $C(S)$ ist, folgt die Behauptung für $AP(S)$ dann unmittelbar aus der Definition von $AP(S)$. Für $WAP(S)$ erhält man die Behauptung aus der Definition von $WAP(S)$, wenn man sich überzeugt hat, daß die Topologie

$\mathcal{G}(\text{WAP}(S), C(S)')$ mit der schwachen Topologie auf $\text{WAP}(S)$ übereinstimmt. Dies folgt aber sofort aus dem Satz von Hahn-Banach.

- (2) Jede stetige Rechtsdarstellung von S durch eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe von Operatoren auf einem reflexiven Banachraum ist schwach fast-periodisch (in diesem Fall folgt aus der Beschränktheit der Mengen $\{sx: s \in S\}$ ($x \in E$) schon ihre schwache Kompaktheit).

(6.5) Satz:

Für jede [schwach] fastperiodische Darstellung einer topologischen Halbgruppe S auf einem topologischen Vektorraum E und jedes $\mu \in E'$, zu dem eine subinvariante Sublinearform p mit $\mu \in p$ existiert, gilt $T_\mu \in L(E, AP(S))$ [$T_\mu \in L(E, \text{WAP}(S))$].

Beweis:

Nach (5.8) ist in beiden Fällen zunächst $T_\mu \in L(E, C(S))$ (hierfür braucht man die dominierende Sublinearform).

Bzgl. der schwachen Topologien in E und $C(S)$ ist T_μ dann ebenfalls stetig (s. SCHAEFER [1971], IV, Thm. 7.4). Da Relativkompaktheit unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt, ist daher für jedes $x \in E$ die Menge $T_\mu(\{sx: s \in S\})$ relativkompakt. Wegen $T_\mu(\{sx: s \in S\}) = \{\mu \circ sx: s \in S\} = \{l_s(\mu \circ x): s \in S\} = \{l_s(T_\mu(x)): s \in S\}$ ist daher $T_\mu(x) \in AP(S)$ [$\text{WAP}(S)$]. //

(6.6) Folgerung:

Jede [schwach] fastperiodische Darstellung von S durch Kontraktionen auf einem Banachraum E ist eine volle $AP(S)$ -Darstellung [volle $WAP(S)$ -Darstellung].

Beweis:

Zu jedem $\mu \in E'$ gibt es eine majorisierende subinvariante Sublinearform: $p(x) = \|\mu\| \|x\|$.

Satz (2.8) liefert nun wieder eine Charakterisierung der Linksamenabilität von $AP(S)$ [$WAP(S)$] durch invariante Fortsetzungssätze für [schwach] fastperiodische Darstellungen. Anstatt die genaue Formulierung aufzuführen, geben wir einen Spezialfall an:

(6.7) Satz:

Sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe und E ein Banachraum, auf dem eine schwach fastperiodische Darstellung von G durch kontrahierende Operatoren gegeben ist. Dann besitzt jedes invariante, stetige Funktional μ auf einem invarianten Teilraum von E eine invariante, stetige Fortsetzung $\mu' \in E'$ mit $\|\mu'\| = \|\mu\|$.

Insbesondere trennt E'_G die Punkte von E_G .

Beweis:

Die Behauptung folgt aus (6.6) und (2.8)(1) $\Rightarrow$ (2),

sobald wir wissen, daß $WAP(G)$ linksamenabel ist. Dies ist jedoch gerade der Inhalt von Theorem 4 in RYLL-NARDZEWSKI [1966]. (Für einen einfachen Beweis des zugrundeliegenden Fixpunktsatzes von Ryll-Nardzewski vgl. NAMIOKA-ASPLUND [1967], wo eine Aussage über dentable Mengen den von Ryll-nardzewski verwendeten Martingalsatz ersetzt.)

Zur Herleitung von Fixpunktsätzen sind fastperiodische Darstellungen auf Funktionenräumen von Interesse, die zu bestimmten Aktionen auf kompakten Räumen dual sind. Zu deren Beschreibung erinnern wir an einige topologische Tatsachen, die man z.B. in BOURBAKI [1974], Chap. X, finden kann:

Für einen kompakten Raum Y sei $C(Y,Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von Y in Y . In $C(Y,Y)$ sind zwei Topologien besonders wichtig: die gleichmäßige und die schwache Topologie (d.h. die Topologie der punkweisen Konvergenz). Da jeder kompakte Raum genau eine die Topologie erzeugende Uniformität besitzt, steht auch der Begriff der Gleichstetigkeit einer Teilmenge von $C(Y,Y)$ zur Verfügung. Nach dem Satz von Ascoli stimmen in $C(Y,Y)$ die gleichstetigen Mengen mit den bzgl. der gleichmäßigen Topologie präkompakten Mengen überein, und, da $C(Y,Y)$ in der gleichmäßigen Topologie vollständig ist, auch mit den in dieser Topologie relativkompakten Mengen.

Ist S eine topologische Halbgruppe und $SxY \rightarrow Y$ eine Aktion von S auf einem kompakten Raum Y , dann sei die zu S homomorphe Teilhalbgruppe von $C(Y,Y)$ mit $\tilde{S}$ bezeichnet.

(6.8) Definition:

Eine einzeln stetige Aktion $SxY \rightarrow Y$ auf dem kompakten Raum Y heißt gleichstetig [schwach gleichstetig], wenn $\tilde{S}$ in $C(Y,Y)$ relativkompakt bzgl. der gleichmäßigen schwachen Topologie ist.

(6.9) Bemerkungen:

- (1) Der Zusammenhang zwischen invarianten Mitteln über $AP(S)$ und gleichstetigen Aktionen von S auf kompakten Räumen wurde in LAU [1973] untersucht, wo die entsprechenden Fixpunktsätze auf kompakten Räumen und kompakten, konvexen Mengen zuerst bewiesen wurden. Insbesondere wird dort gezeigt (Lemma 3.1): Ist $SxY \rightarrow Y$ eine gleichstetige Aktion auf einem kompakten Raum Y , dann ist die Abbildung $T_f: Y \rightarrow C(S)$ ($y \mapsto yef$) stetig. Daraus folgt:

- (2) Jede gleichstetige Aktion $SxY \rightarrow Y$ ist simultan stetig.

Beweis: Seien zwei kongruente Netze $(s_\alpha) \rightarrow s$ in S und $(y_\beta) \rightarrow y$ in Y gegeben. Für $f \in C(Y)$ gilt dann wegen $\lim_{\alpha, \beta} |f(s_\alpha y_\beta) - f(sy)| \leq \lim_{\beta} \|T_f(y_\beta) - T_f(y)\| +$
 $+ \lim_{\alpha} |f(s_\alpha y) - f(sy)| = 0 : \lim_{\alpha, \beta} f(s_\alpha y_\beta) = f(sy). //$

(6.10) Satz:

Sei S eine topologische Halbgruppe, Y ein kompakter Raum und K eine kompakte, konvexe Menge in einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum.

- (1) Eine einzeln stetige Aktion $S \times Y \rightarrow Y$ ist genau dann [schwach] gleichstetig, wenn die dazu duale Darstellung auf $C(Y)$ [schwach] fastperiodisch ist.
- (2) Eine einzeln stetige, affine Aktion $S \times K \rightarrow K$ ist genau dann [schwach] gleichstetig, wenn die dazu duale Darstellung auf $A(K)$ [schwach] fastperiodisch ist.

Beweis:

(1), fastperiodischer Fall: Die gleichmäßige Topologie auf $\tilde{S} \subset C(Y, Y)$ wird von Nachbarschaften der Form $U(f, \varepsilon) = \{(\tilde{s}, \tilde{t}) \in \tilde{S} \times \tilde{S} : \|1_{\tilde{S}} f - 1_{\tilde{t}} f\| < \varepsilon\}$ ($f \in C(Y)$, $\varepsilon > 0$) induziert. Da $C(Y)$ vollständig ist, ist die zu $S \times Y \rightarrow Y$ duale Darstellung genau dann fastperiodisch, wenn für alle $f \in C(Y)$ die Menge $\{1_{\tilde{S}} f : \tilde{s} \in \tilde{S}\}$ präkompakt ist, d.h. wenn gilt:

$\forall f \in C(X), \varepsilon > 0 \exists s_0, \dots, s_n \in S \forall s \in S \exists i \in \{0, \dots, n\} :$

$\|1_{\tilde{S}} f - 1_{s_i} f\| < \varepsilon$. Mit anderen Worten: es gibt zu

jeder Nachbarschaft $U = U(f, \varepsilon)$ Elemente $\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_n \in \tilde{S}$, so daß $\tilde{S} = \{\tilde{t} \in \tilde{S} : \exists i \in \{0, \dots, n\} \text{ mit } (\tilde{s}_i, \tilde{t}) \in U\}$.

Dies bedeutet gerade, daß S präkompakt in der gleichmäßigen Topologie von $C(Y, Y)$ ist (s. KELLEY [1955], S. 198).

(1), schwach fastperiodischer Fall: Dies ist genau die Aussage von Lemma 4 in ELLIS [1959]

(2) folgt aus (1), man hat nur die Abgeschlossenheit von $A(K)$ in $C(K)$ zu benutzen. //

Der fastperiodische Fall der folgenden Aussage ist aus der oben erwähnten Arbeit LAU [1973] bekannt.

(6.11) Folgerung:

Für jede topologische Halbgruppe S gilt:
 $AP(S)$ [WAP(S)] ist genau dann linksamenabel, wenn für jede [schwach] gleichstetige Aktion von S auf einer kompakten, konvexen Menge K in einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum ein gemeinsamer Fixpunkt von S in K existiert.

Beweis:

Nach (6.10)(2) und (6.6) ist für jede [schwach] gleichstetige Aktion von S auf K die duale Darstellung auf $A(K)$ eine volle $AP(S)$ -Darstellung [volle WAP(S)-Darstellung] durch positive Operatoren. Nach (6.4)(1) ist die linke Translation in $AP(S)$ [WAP(S)] eine volle $AP(S)$ -[WAP(S)-]Darstellung. Damit folgt die Behauptung aus Satz (3.7). //

Falls S eine Identität besitzt, d.h. falls $AP(S)$ und $WAP(S)$ Banachalgebren sind, gilt auch die analoge Folgerung aus (6.10)(1) über die Äquivalenz zwischen der extremen Linksamenabilität von $AP(S)$ bzw. $WAP(S)$ und Fixpunkteigenschaften gleichstetiger Aktionen auf kompakten, konvexen Mengen. Wir verzichten auf die genaue Formulierung.

Als unmittelbares Korollar aus (6.11) erhält man den bekannten Fixpunktsatz von Kakutani:

(6.12) Korollar:

Jede gleichstetige Gruppe G von affinen, stetigen Abbildungen einer konvexen, kompakten Teilmenge K eines lokalkonvexen topologischen Vektorraumes in sich besitzt einen gemeinsamen Fixpunkt.

Beweis:

Für G (versehen mit der diskreten Topologie) ist $WAP(G)$ linksamenabel nach dem schon in (6.7) zitierten Fixpunktsatz von Ryll-Nardzewski. //

Literaturverzeichnis.

Argabright, L. N. [1968]:

Invariant Means and Fixed Points: A sequel to Mitchells Paper.

Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 127-130

Bauer, H. [1958]:

Über die Fortsetzung positiver Linearformen.
Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-
Nat. Kl. (1958), 177-190

Bourbaki, N. [1974]:

Topologie Générale, Chap. 5 à 10.
Nouvelle Edition (1974), Herrmann, Paris

Burckel, R. B. [1970]:

Weakly Almost Periodic Functions on Semigroups.
Gordon and Breach, New York, London, Paris
(1970)

Day, M. M. [1957]:

Amenable Semigroups.

Ill. J. Math. 1 (1957), 509-544

" [1961]:

Fixed Points for Compact Convex Sets.

Ill. J. Math. 5 (1961), 585-589

" [1964]:

Corrections to "Fixed Points for Compact
Convex Sets".

Ill. J. Math. 8 (1964), 713

" [1968]:

Semigroups and Amenability.

In: K. Folley, Ed.: Semigroups.

Symposium, Detroit 1968, Academic Press,
New York, London (1969)

De Leeuw, K. - Glicksberg, I. [1961]:

Applications of Almost Periodic Compactifications.
Acta Math. 105 (1961), 63-97

- Eberlein, W. F. [1949]:
Abstract Ergodic Theorems and Weak Almost
Periodic Functions.
Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949), 217-240
- Ellis, R. [1959]:
Equicontinuity and Almost Periodic Functions.
Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 637-643
- Flösser, H. O. [1975]:
Fortsetzungen extremaler Funktionale.
Math. Ann. 214 (1975), 195-198
- Granirer, E. [1965]:
Extremely Amenable Semigroups I.
Math. Scand. 17 (1965), 177-197
- " [1967]:
Extremely Amenable Semigroups II.
Math. Scand. 20 (1967), 93-113
- Greenleaf, F. P. [1969]:
Invariant Means on Topological Groups.
Van Nostrand-Reinhold Co., New York (1969)
- Grossman, M. W. [1973]:
Uniqueness of Invariant Means on Certain
Introverted Spaces.
Bull. Austr. Math. Soc. 9 (1973), 109-120
- Hadwiger, H. - Nef, W. [1954]:
Zur axiomatischen Theorie der invarianten
Integration in abstrakten Räumen.
Math. Zeitschr. 60 (1954), 305-319
- Ionescu-Tulcea, A. und C. [1961]:
On the Lifting Property I.
J. Math. Anal. Appl. 3 (1961), 537-546
- Jameson, G. [1970]:
Ordered Linear Spaces.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg,
New York (1970) (Lecture Notes in Math. 141)

- Kelley, J. L. [1955]:
General Topology.
Van Nostrand-Reinhold Co., New York (1955)
- Landsberg, M. - Schirotzek, W. [1975]:
Extremal and Invariant Extensions of
Linear Funktionals.
Manuskript (1975)
- Lau, A. T. [1973]:
Invariant Means on Almost Periodic Functions
and Fixed Point Properties.
Rocky Mountain J. Math. 3 (1973), 69-76
- " [1974]:
Amenability and Invariant Subspaces.
J. Austr. Math. Soc. 28 (1974), 200-204
- Lazar, A. J. [1967]:
Affine Functions on Simplexes and Extreme
Operators.
Israel J. Math. 5 (1967), 31-43
- Mitchell, T. [1966]:
Fixed Points and Multiplicative Left
Invariant Means.
Trans. Amer. Math. Soc. 122 (1966), 195-202
- " [1968]:
Function Algebras, Means, and Fixed Points.
Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 117-126
- " [1970]:
Topological Semigroups and Fixed Points.
Ill. J. Math. 14 (1970), 630-641
- Morse, A. - Agnew, R. [1938]:
Extensions of Linear Functionals with
Applications to Limits, Integrals,
Measures and Densities.
Ann. of Math. 39 (1938), 20-30
- Nagel, R. [1974]:
Mean Ergodic Semigroups and Invariant
Ideals in Ordered Banach Spaces.
In: Lecture Notes in Physics 28 (1974)
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

- Namioka, I. [1967]:
On Certain Actions of Semigroups on L-Spaces.
Studia Math. 29 (1967), 63-77
- Namioka, I. - Asplund, E. [1967]:
A Geometric Proof of the Ryll-Nardzewski
Fixed-Point-Theorem.
Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 443-445
- Nef, W. [1956]:
Invariante Linearformen.
Math. Nachr. 15 (1956), 123-140
- Peressini, A. L. [1967]:
Ordered Topological Vector Spaces.
Harper & Row, New York, Evanstown, London (1967)
- Portenier, C. [1971]:
Espaces de Riesz, espaces de fonctions et
espaces de sections.
Comment. Math. Helvet. 46 (1971), 289-313
- Rao, C. R. [1965]:
Invariant Means on Spaces of Continuous
or Measurable Functions.
Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965), 187-196
- Rickert, N. [1967]:
Amenable Groups and Groups with the Fixed
Point Property.
Trans. Amer. Math. Soc. 127 (1967), 221-232
- Robison, G. B. [1954]:
Invariant Integrals over a Class of
Banach Spaces.
Pacific J. Math. 4 (1954), 123-150
- Ryll-Nardzewski, C. [1966]:
On Fixed Points of Semigroups of Endomor-
phisms of Linear Spaces.
Proc. 5th Berkeley Symp. on Math. Statistics
and Probability, vol. II, Berkeley 1966,
Univ. of California Press, Berkeley and
Los Angeles (1969)

Schaefer, H. H.

[1971]:

Topological Vector Spaces.

3rd Printing (1971), Springer-Verlag,
Berlin, Heidelberg, New York

Silverman, R. J.

[1956]:

Means on Semigroups and the Hahn-Banach
Extension Property.

Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 222-237

Verzeichnis der Definitionen.

A-Darstellung von S, X	(4.10)
Aktion, affine	(5.1)
" , einzeln stetige	(5.1)
" , gleichstetige	(6.8)
" , schwach gleichstetige	(6.8)
" , simultan stetige	(5.1)
Algebra, geordnete	(4.13)
Antihomomorphismus	(1.2)
Arens-Produkt	(2.5)
Banachalgebra, geordnete	vor (5.11)
Darstellung, duale	(5.1)
" , [schwach] fastperiodische	(6.1)
" , positive lineare	(3.1)
Diniraum	(4.6)
Extrem linksamenabel	(4.6)
Funktion, [schwach] fastperiodische	(6.1)
Funktional, einfaches	(2.1)
" , extremales	(4.1)
Halbgruppe, simultan stetige	(5.1)
" , topologische	(5.1)
Halbgruppenhomomorphismus	(1.2)
Invariantes Element	(1.6)
Invariante Menge	(1.4)
Kern, introvertierter	(2.12)
Klasse, zulässige	vor (2.8)
Koeffizient	(1.8)
Linksamenabel	(1.6)
Linksdarstellung, lineare	(1.3)
Mittel	(1.6)
" , linksinvariantes	(1.6)
Operator, interner	(4.2)
" , externer	(4.17)
" , extremaler	(4.17)

Rechtsdarstellung, lineare	(1.3)
" , lokal-gleichmäßig stetige	(5.12)
" , stetige	(5.1)
Sublinearform, subinvariante	(2.9)
Teilraum, extrem linksamenabler	(4.6)
" , linksamenabler	(1.6)
" , introvertierter	(2.2)
Translation	(1.4)
Vektorraum, geordneter topologischer	(3.1)
X-Darstellung, einfache	(2.1)
" , externe	(4.17)
" , extremale	(4.17)
" , interne	(4.4)
" , normalisierte positive	(3.4)
" , positive	(3.4)
" , volle	(2.2)

Lebenslauf.

Am 9. 6. 1948 wurde ich als Sohn des Universitätsprofessors Dr. Gustav Clausing und seiner Frau, der Ärztin Dr. Hertha Clausing, geb. Oechelhaeuser, in Erlangen geboren.

Von 1954 bis 1958 besuchte ich die Volksschule in Erlangen, von 1958 bis 1967 das dortige Gymnasium Fridericianum, an dem ich im Juni 1967 das Abitur ablegte.

Vom Wintersemester 1967/68 bis zum Wintersemester 1969/70 studierte ich an der Universität Erlangen-Nürnberg Mathematik und Physik. Im Sommer 1972 wechselte ich für ein Semester nach Bonn über, wo ich u. a. Vorlesungen bei Prof. J. Tits hörte. Anschließend setzte ich mein Studium in Erlangen fort. Hier hörte ich Vorlesungen bei den Professoren H. Bauer, K. Jacobs, D. Kölzow, G. Nöbeling, u. a. Im Oktober 1972 legte ich die Diplomprüfung in Mathematik ab. Meine Diplomarbeit behandelte ein Thema aus der Funktionalanalysis, mein Wahlfach war Wahrscheinlichkeitstheorie.

Seit November 1972 bin ich Doktorand bei Prof. H. Bauer und seit Juni 1974 zugleich wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg.

Von April 1968 bis Juni 1974 wurde mein Studium bzw. meine Promotion durch ein Stipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes gefördert.

Erlangen, November 1975.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990